PAPER - 9 Solution

(1) જો $1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+..........=2-\sqrt{2}$, હોય, તો $\alpha(0<\alpha<\pi)$.

ઉકેલ: $1+\cos\alpha+\cos^2\alpha+.........=2-\sqrt{2}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{1-\cos\alpha}=2-\sqrt{2}$ [સમગુણોત્તર શ્રેણીનો સરવાળો $\because S_\infty=\dfrac{a}{1-r}$]

$\Rightarrow 1-\cos\alpha=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}} \Rightarrow 1-\cos\alpha$

$=\dfrac{1}{2-\sqrt{2}}\times\dfrac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}$ [સંમેયીકરણ]

$=\dfrac{2+\sqrt{2}}{4-2}=\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

$1-\cos\alpha=1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\cos\dfrac{3\pi}{4} \quad \Rightarrow \alpha=\dfrac{3\pi}{4}$

(3) જો $a^{1/x}=b^{1/y}=c^{1/z}$ અને a, b, c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં હોય, તો x, y અને z એ.....

ઉકેલ : $a^{1/x}=b^{1/y}=c^{1/z}=p$

ધારો અહીં, $a^{1/x}=p,\ b^{1/y}=p,\ c^{1/z}=p$

$\therefore a=p^x,\ b=p^y,\ c=p^z$

હવે, a, b અને c સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે.

$\therefore b^2=ac \quad \therefore (p^y)^2=p^x.p^z \quad \therefore p^{2y}=p^{x+z} \quad p\neq 10$

$\therefore 2y=x+z \quad \therefore \dfrac{x+z}{2}=y$

$\therefore$ x, y અને z એ સમાંતર શ્રેણીમાં છે.

(4) જો $\dfrac{3+5+7+..........n \text{ પદ સુધી}}{5+8+11+.........10 \text{ પદ સુધી}}=7$, તો n ની કિંમત શું હોય?

ઉકેલ : $\dfrac{3+5+7+......n \text{ પદ સુધી}}{5+8+11+........10 \text{ પદ સુધી}}=7$ આપેલ છે.

$$\Rightarrow \dfrac{\dfrac{n}{2}[6+(n-1)2]}{\dfrac{10}{2}[10+(10-1)3]}=7 \Rightarrow \dfrac{n(2n+4)}{10\times 37}=7$$

$\Rightarrow n^2+2n-1295=0 \Rightarrow (n+37)(n-35)=0$ તેથી $n=35$.

(5) જો શ્રેણીક $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ \lambda & -3 & 0 \end{bmatrix}$ શૂન્ય શ્રેણીક હોય, તો $\lambda=......$

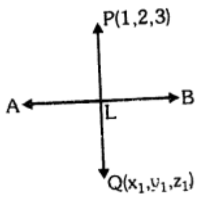
ઉકેલ: શ્રેણીક $A=\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -1 & 0 & 3 \\ \lambda & -3 & 0 \end{bmatrix}$ એ શૂન્ય શ્રેણીક છે.

$\Rightarrow |A|=0 \Rightarrow 0-1(-3\lambda)+(-2)(3)=0$

$\Rightarrow 3\lambda-6=0 \Rightarrow \lambda=2$.

(7) બિંદુ (1, 2, 3) નું રેખા $\vec{r}=\left(6\hat{i}+7\hat{j}+7\hat{k}\right)+\lambda\left(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)$માં પ્રતિબિંબ શોધો.

ઉકેલ :



ધારો કે આપેલ બિંદુ P (1, 2, 3) નું આપેલ રેખામાં પ્રતિબિંબ Q છે અને L એ P માંથી આપેલ રેખા પર દોરેલા લંબનો લંબપાદ છે.

જ્યારે રેખાના સમીકરણમાં $\vec{r}$ એ λ ના જુદા જુદા મૂલ્યો માટે તેના પર આવેલા બિંદુનો સ્થાન સદિશ દર્શાવે છે. તેથી, L નો સ્થાન સદિશ છે.

$6\hat{i}+7\hat{j}+7\hat{k}+\lambda\left(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)=(6+3\lambda)\hat{i}+(2\lambda+7)\hat{j}+(7-2\lambda)\hat{k}$

$\therefore \overline{PL}=$ L નોસ્થાનસદિશ$-$P નો સ્થાનસદિશ

$=\left[(6+3\lambda)\hat{i}+(2\lambda+7)\hat{j}+(7-2\lambda)\hat{k}\right]-\left[\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right]$

$=(3\lambda+5)\hat{i}+(2\lambda+5)\hat{j}+(-2\lambda+4)\hat{k}$

જ્યારે $\overline{PL}$ $\vec{b}=3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}$ ને સમાંતરઆપેલરેખાને લંબછે. $\therefore \overline{PL}.\vec{b}=0$

$\Rightarrow \left[(3\lambda+5)\hat{i}+(2\lambda+5)\hat{j}+(-2\lambda+4)\hat{k}\right].\left(3\hat{i}+2\hat{j}-2\hat{k}\right)=0$

$\Rightarrow 3(3\lambda+5)+2(2\lambda+5)-2(-2\lambda+4)=0$

$\Rightarrow 17\lambda+17=0 \Rightarrow \lambda=-1$

L નો સ્થાનસદિશ $3\hat{i}+5\hat{j}+9\hat{k}$ છે. [(i) માં $\lambda=-1$મૂકતાં]

ધારોકે Q નાયામ(x_1, y_1, z_1)છે.જ્યારે L એ PQનુંમધ્યબિંદુ છે.

$\therefore \dfrac{P.V \text{ of } P+P.V \text{ of } Q}{2}=$ L નોસ્થામસદિશ

$\Rightarrow \dfrac{\left(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}\right)+\left(x_1\hat{i}+y_1\hat{j}+z_1\hat{k}\right)}{2}=3\hat{i}+5\hat{j}+9\hat{k}$

$\Rightarrow \left(\dfrac{x_1+2}{2}\right)\hat{i}+\left(\dfrac{y_1+2}{2}\right)\hat{j}+\left(\dfrac{z_1+3}{2}\right)=3\hat{i}+5\hat{j}+9\hat{k}$

$\Rightarrow \dfrac{x_1+1}{2}=3\ \dfrac{y_1+2}{2}=5,\ \dfrac{2+3}{2}=9 \Rightarrow x_1=5,\ y_1=8,\ z_1=15$

$\Rightarrow$તેથી,આપેલીરેખામાંP (1, 2, 3)નું પ્રતિબિંબ(5, 8, 15)છે.

(8) પ્રત્યેક $n \ge 2$ માટે, $n^2 (n^4 - 1)$ એ ……. વડે વિભાજ્ય છે.

ઉકેલ : પ્રત્યેક ધનપૂર્ણાંક $n \ge 2$, $P(n): n^2 (n^4 - 1)$

$\Rightarrow P(2): 4 \times 15 = 60, P(3): 9 \times 80 = 60 \times 12$

$\therefore$ વિકલ્પો પરથી, Ans. (A) 60

(9) $\sin x + \sqrt{3}$ મહત્તમ છે જ્યારે…….

ઉકેલ: $y = \sin x + \sqrt{3}\cos x$ તો $\therefore \dfrac{dy}{dx} = \cos x - \sqrt{3}\sin x$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -\sin x - \sqrt{3}\cos x$$

મહત્તમ કે ન્યૂનત્તમ માટે $\dfrac{dy}{dx} = 0 \quad \therefore \cos x = \sqrt{3}\sin x$

$\Rightarrow \tan x = \dfrac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 30^\circ$

જ્યારે $\dfrac{d^2y}{dx^2} < 0$ માટે $x = 30^\circ$

$\therefore$(3) સાચો જવાબ છે.

(10) વક્ર $y = \sin^2 x$, x - અક્ષ તેમજ $x = 0$ અને $x = \pi/2$ વડે આંતરાયેલ ભાગનું ક્ષેત્રફ્ફ શુ થાય ?

ઉકેલ : ક્ષેત્રફળ $A = \int_0^{\pi/2} \sin^2 x.dx = \int_0^{\pi/2}\left(\dfrac{1-\cos 2x}{2}\right)dxa$

$= \dfrac{1}{2}[x]_0^{\pi/2} - \dfrac{1}{4}[\sin 2x]_0^{\pi/2} = \dfrac{\pi}{4}.$

(13) જો $f : R \to S$, $f(x) = \sin x - \sqrt{3}\cos x + 1$ વ્યાપ્ત વિધેય વડે વ્યાખ્યાયિત થાય S નો અંતરા લ શું થાય?

ઉકેલ:- $\sqrt{a^2+b^2} \le (a\sin x + b\cos x) \le \sqrt{a^2+b^2}$ નો ઉપયોગ કરતાં

$-\sqrt{1+(-\sqrt{3})^2} \le (\sin x - \sqrt{3}\cos x) \le \sqrt{1+(-\sqrt{3})^2}$

$-2 \le (\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1) \le 2$

$-2+1 \le (\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1) \le 2+1$

$-1 \le (\sin x - \sqrt{3}\cos x + 1) \le 3$ એટલે કે વિસ્તાર $= [-1, 3]$

$\therefore f$ વ્યાપ્ત થવા માટે $S = [-1, 3]$.

(14) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^n+1)} = ...$

ઉકેલ : $I = \displaystyle\int \frac{x^n + 1 - x^n}{x(x^n+1)}dx \quad \int\left[\frac{1}{x} - \frac{x^{n-1}}{x^n+1}\right]dx$

$= \displaystyle\int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{x}\int \frac{nx^{n-1}}{x^n+1}dx = \int \frac{1}{x}dx - \frac{1}{n}\int \frac{\frac{d}{dx}\left(x^n+1\right)}{x^n+1}dx$

$= \log x - \dfrac{1}{n}\log(x^n+1) + c$

$= \dfrac{1}{n}[n\log x - \log(x^n+1)] + c = \dfrac{1}{n}\log\left(\dfrac{x^n}{x^n+1}\right) + c$

(15)

ઉકેલ : માંગેલો સદિશ c એ $\lambda\left(\dfrac{a}{|a|} + \dfrac{b}{|b|}\right)$ દ્વારા દર્શાવાય.

હવે , $\dfrac{a}{|a|} = \dfrac{1}{9}(7i - 4j - 4k)$ અને $\dfrac{b}{|b|} = \dfrac{1}{3}\left(-2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}\right)$

$\Rightarrow c = \lambda\left(\dfrac{1}{9}\hat{i} - \dfrac{7}{9}\hat{j} + \dfrac{2}{3}\hat{k}\right)|c|^2 = \lambda^2\dfrac{54}{81}$

$\lambda^2 = 225$ અથવા $\lambda = \pm 15$ તેથી $c = \pm\dfrac{5}{3}\left(\hat{i} - 7\hat{j} + 2\hat{k}\right)$

(17) $p \wedge (\sim p) = c$ નું દ્વંદ્વ વિધાન કયું છે ?

ઉકેલ : કોઈ વિધાનનું દ્વંદ્વ વિધાન $\wedge$ ને $\vee$ વડે, ને $\wedge$ વડે, c ને t વડે, અને t ને c વડે એક સાથે બદલવાથી મફે.

$\therefore$ આપેલ વિધાનનું દ્વંદ્વ વિધાન $p \vee (\sim p) = t$ મફે.

ઉકેલ: y - અક્ષની સાપેક્ષે બિંદુ (h, k) નું પ્રતિબિંબ (-h, k) થશે. તેથી, (1, -2) એ (-1, -2) થશે.

(20) 52 પત્તામાંથી એક પત્તુ યાદચ્છિક પસંદ કરતાં તે પત્તું રાજા હોય કે ચોકટનું હોય તેની સંભાવના …….. છે.

ઉકેલ : 52 પત્તામાંથી એક પત્તુ પસંદ કરતાં તે રાજા હોય તે ઘટના A અને તે ચોકટનું હોય તે ઘટના B છે.

અહીં, $P(A) = \dfrac{4}{52}, P(B) = \dfrac{13}{52}$ અને $P(A \cap B) = \dfrac{1}{52}$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$= \dfrac{4}{52} = \dfrac{13}{52} - \dfrac{1}{52} = \dfrac{16}{52} = \dfrac{4}{13}$

(21) $f(x) = \begin{cases} \cos x & \text{જો } x \ge 0 \\ x + k & \text{જો } x < 0 \end{cases}$ લો, જો $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ અસ્તિત્વ ધરાવે તો અચળ K નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ આપેલ છે.

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0} x + k = \lim\limits_{x\to 0} \cos x \Rightarrow 0 + k = \cos 0 \Rightarrow k = 1$

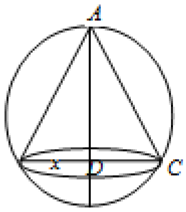
(22)

ઉકેલ: $y = \dfrac{1}{1 + \frac{x^\beta}{x^\alpha} + \frac{x^\gamma}{x^\alpha}} + \dfrac{1}{1 + \frac{x^\alpha}{x^\beta} + \frac{x^\gamma}{x^\beta}} + \dfrac{1}{1 + \frac{x^\alpha}{x^\gamma} + \frac{x^\beta}{x^\gamma}}$

$y = \dfrac{x^\alpha + x^\beta + x^\gamma}{x^\alpha + x^\beta + x^\gamma} = 1 \quad \therefore \dfrac{dy}{dx} = 0$

(23) એક મહત્તમ ઘનફ્ફ ધરાવતો શંકુ એક ગોફ્ફાની અંદર રહેલ છે. તો શંકુની ઊંચાઇ અને ગોફ્ફાના વ્યાસનો ગુણોત્તર=…

ઉકેલ : ધારો કે ગોફ્ફાનો વ્યાસ $AE = 2r$ છે. ધારો કે શંકુની ત્રિજ્યા x અને y ઊંચાઇ છે.



$\therefore AD = y, BD^2 = AD.DE$ અથવા $x^2 = y(2r - y)$.....(i)

શંકુનું ઘનફળ $V = \frac{1}{3}\pi x^2 y = \frac{1}{3}\pi y(2r - y)y \;\; = \frac{1}{3}\pi(2ry^2 - y^3)$

$\Rightarrow \frac{dV}{dy} = \frac{1}{3}\pi(4ry - 3y^2) \Rightarrow \frac{dV}{dy} = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{3}\pi(4ry - 3y^2) = 0 \Rightarrow y(4r - 3y) = 0 \Rightarrow y = \frac{4}{3}r, 0$

હવે $\frac{d^2V}{dy^2} = \frac{1}{3}\pi(4r - 6y), t \; y = \frac{4}{3}r$ લેતાં,

$\Rightarrow \frac{d^2V}{dy^2} = \frac{1}{3}\pi\left(4r - 6\times\frac{4}{3}r\right) =$ ઋણ કિંમત

y = 4/3r આગળ શંકુનું ઘનફળ મહત્તમ થાય

$\Rightarrow \frac{\text{Height}}{\text{Diametre}} = \frac{y}{2r} = \frac{2}{3}$.

(28)

ઉકેલ : આપેલ સરવાળો એ સમીકરણ $[(x - 3) + 2]^{100} = (x - 1)^{100} = (1 - x)^{100}$ નું વિસ્તરણ છે.

$\therefore$ x=53 એ T_{54} માં પદમાં આવશે.

(29) બિંદુ (-2, -1) માંથી પરવલય $y^2 = 4x$ પરના સ્પર્શકોની સ્પર્શજીવાની લંબાઈ કેટલી થાય ?

ઉકેલ : અહીં a = 1, (x_1, y_1) (-2, -1)

(30) જો ΔABC ના શિરોબિંદુઓ અનુક્રમે (a, 0, 0) ; (0, b, 0) અને (0, 0, c) હોય, તો $\angle B$ ....

BC ની દિશા = 0, -b, c

BA ની દિશા = a, -b, 0