PAPER - 8 SOLUTION

(1) $\int_0^{\pi/2} \frac{a\sin x + b\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx = ...$

ઉકેલ : $I = \int_0^{\pi/2} \frac{a\sin x + b\cos x}{\sin x + \cos x}\, dx$ ....(1)

$I = \int_0^{\pi/2} \frac{a\sin(\pi/2 - x) + b\cos(\pi/2 - x)}{\sin(\pi/2 - x) + \cos(\pi/2 - x)}\, dx$

$= \int_0^{\pi/2} \frac{a\cos x + b\sin x}{\sin x + \cos x}\, dx$ .... (2)

$\therefore\ 2I = \int_0^{\pi/2} \frac{(a+b)(\sin x + \cos x)}{\sin x + \cos x}\, dx$

$= \int_0^{\pi/2} (a+b)\, dx = (a+b)\,\pi/2 \Rightarrow I = (a+b)\,\pi/4$

(2) જો $f(x) = |x - 2|$ અને $g(x) = f[f(x)]$, હોય, તો $x > 20$, માટે $g'(x) = ...$

ઉકેલ : 5" $g(x) = f[f(x)] \quad = f\{|x - 2|\} = ||x - 2| - 2|$

But $x > 20 \Rightarrow |x - 2| = x - 2 \Rightarrow g(x) = |x - 2 - 2| = x - 4$

$\therefore g'(x) = 1$

(4) જો $x = t^2$ અને $y = 2t$, હોય, તો $t =$ નું સમીકરણ શું થા

ઉકેલ: $t = 1$ આગળ સ્પર્શક $x = t^2$,

$\frac{dx}{dt} = 2t \quad \frac{dy}{dt} = 2$

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{t}$

$\left(\frac{-dx}{dy}\right)_{t=1} = -t = -1$

$y - 2$ ના સ્પર્શકનું સમીકરણ $= -1(x - 1)$

$x + y = 3$

$x + y - 3 = 0$

(5) વક્ર $y^2 = 4x$, y - અક્ષ અને $y = 3$ દ્વારા ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ : ક્ષેત્રફળ $= \int_0^3 x\, dy = \int_0^3 \frac{y^2}{4}\, dy = \frac{1}{4}\left[\frac{y^3}{3}\right]_0^3$

$= \frac{1}{12}(27 - 0) = 9/4$ એકમ

(6) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ b+c-a & c+a-b & a+b-c \end{vmatrix}$ બરાબર શું થાય?

(A) 0 (B) ab + bc + ca (C) abc (D) a + b + c

Answer : A

$R_2)]$ લાગુ પડતાં,

$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ +c & c+a & a+b \\ b+c) & -(a+b+c) & -(a+b+c) \end{vmatrix}$

$b+c)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

ાઓને ફેંકવાથી એક યુગ્મ મળવાની સંભાવના કેટલી?

ામની સંખ્યા = 36

ાં પરિણામની સંખ્યા = 6

), (2, 2), (3, 3), (4, 4), (5, 5), (6, 6),

ભાવના $= \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

ને q એવી ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ હોય કે જેથી $p^2 + q^2 = 1$ થાય, તો

l મહત્તમ કિંમત કેટલી ?

ત્તર મધ્યક ≥ સમગુણોત્તર મધ્યકનો ઉપયોગ કરતાં

$\geq p.q. \quad \Rightarrow pq \leq \frac{1}{2}$

$+ q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq \quad \Rightarrow (p+q) \leq \sqrt{2}$

(9) $\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{1-n^2} + \frac{2}{1-n^2} + ... + \frac{n}{1-n^2}\right] = ...$

(10) વિકલ સમીકરણ $e^y \frac{dy}{dx} + (e^y + 1)\cot x = 0$ નો વ્યાપક ઉકેલ શું થાય?

ઉકેલ : $e^y \frac{dy}{dx} + (e^y + 1)\cot x = 0 \qquad e^y \frac{dy}{dx} = -(e^y + 1)\cot x$

$\int \frac{e^y}{e^y + 1} dy = \int -\cot x\, dx$

ધારો કે $e^y + 1 = t$ લેતાં $e^y\, dy = dt$

$\int \frac{dt}{t} = \int -\cot x\, dx$

$\log t = -\log \sin x + C$

$\log(e^y + 1) + \log \sin x = C$

$\log(e^y + 1)\sin x = C$

$(e^y + 1)\sin x = e^c$

$(e^y + 1)\sin x = K$

(11) A (2, 3, 5), B (1, 2, 3), C(-5, 4, -2) અને D (1, 10, 10) હોય, તો

ઉકેલ: $\vec{AB} = (-1,-1,-2)$ અને $\vec{CD} = (6,6,12)$. અહીં, $\vec{CD} = -6\ \vec{AB}$

$\therefore k = -6 < 0$

$\therefore$ $\vec{AB}$ અને $\vec{CD}$ અને $\vec{CD}$ની દિશાઓ પરસ્પર વિરુદ્ધ છે.

$\therefore$ $\vec{AB} = \vec{CD}$ નથી તેમજ $\vec{AB} \perp \vec{CD}$ નથી.

વધુમાં $\vec{BC} = (-6,2,-5)$ અને $\vec{AB} = (-1, -1, -2)$ ની દિશાઓ ભિન્ન છે.

$\therefore$ $\vec{AB}$ અને $\vec{BC}$ અસમરેખ છે. $\therefore$ $\vec{AB} \| \vec{CD}$ છે.

(12) આપેલ શ્રેઢી - $1^2 + 2.2^2 + 3^2 + 2.4^2 + 5^2 + 2.6^2 + \ldots\ldots$ ના પ્રથમ n પદોનો સરવાળો $n(n+1)^2/2$ છે. જ્યારે n યુગ્મ હોય, જ્યારે n અયુગ્મ હોય ત્યારે સરવાળો કેટલો થશે?

ઉકેલ : $1^2 + 2.2^2 + 3^2 + 2.4^2 + 5^2 + 2.6^2 + \ldots\ldots$ n પદો $= n(n+1)^2/2$, હોવાથી જ્યારે n યુગ્મ છે. જ્યારે અયુગ્મ હોય, ત્યારે આ કિસ્સામાં શ્રેણીનું n^{th} મું પદ n^2 થશે. (n - 1) યુગ્મ છે.

તેથી શ્રેણીના પ્રથમ (n - 1) પદોનો સરવાળો શોધવા આપેલા સૂત્રમાં n ના સ્થાને (n - 1) મૂક્તાં.

તેથી પ્રથમ (n - 1) પદોનો સરવાળો $= n(n-1)^2/2$

આથી, શ્રેણીના n પદોનો સરવાળો

= (n - 1) પદોનો સરવાળો + n^{th} મું પદ)

$$= \frac{(n-1)n^2}{2} + n^2 = \frac{(n+1)n^2}{2}$$

(13) જો m સમાંતર મધ્યક 1 અને 31 વચ્ચે મૂકેલ હોય તો 7 માં અને (m - 1) માં મધ્યકનો ગુણોત્તર 5:9 છે, તો m નું મૂલ્ય .... છે.

ઉકેલ : $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ને મધ્યક તરીકે લો, તેથી $1, x_1, x_2, \ldots x_m, 31$ એ (m + 2) પદોની સમાંતર શ્રેણી છે.

હવે, $31 = T_{m+2} = a + (m+1)d = 1 + (m+1)d$

$\therefore d = \frac{30}{m+1}$ આપેલ : $\frac{x_7}{x_{m-1}} = \frac{5}{9}$ $\therefore \frac{T_8}{T_m} = \frac{a+7d}{a+(m-1)d} = \frac{5}{9}$

$$\Rightarrow 9a + 63d = 5a + (5m-5)d \Rightarrow 4.1 = (5m-68)\frac{30}{m+1}$$

$$\Rightarrow 2m + 2 = 75m - 1020 \Rightarrow 73m = 1022 \ \therefore m = \frac{1022}{73} = 14$$

(14) 6 વ્યંજન અને 5 સ્વરમાંથી 4 વ્યંજન અને 3 સ્વર પસંદ કરી બનાવેલ 7 અક્ષરના કુલ.....શબ્દો બને.

ઉકેલ: અહીં, 7 અક્ષરોના બનતાંશબ્દોની સંખ્યા $\binom{6}{4}.\binom{5}{3}.7! = 15(10)(5040) = 7,56,000$

(22) સમતલ અક્ષોને A, B અને C માં મળે છે કે જેથી ત્રિકોણ ABC નું મધ્યકેન્દ્ર (1, 2, 3) થાય. તો સમતલનું

ઉકેલ : ધારો કે સમતલ નુંસમીકરણ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$ ......(i)

જ્યાં $A(a, 0, 0), B(0, b, 0)\ C(0, 0, c)$

મધ્યકેન્દ્ર $\left(\frac{a}{3}, \frac{b}{3}, \frac{c}{3}\right)$

$\frac{a}{3} = 1 : \frac{b}{3} = 2 : \frac{c}{3} = 3$

$a = 3 : b = 6 : c = 9$

$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} + \frac{z}{9} = 1$

(25) જો બિંદુઓ (5, a) અને (b, 7) ને જોડતા રેખાખંડનું મધ્યબિંદુ (3, 5) હોય, તો (a, b) શોધો.

ઉકેલ : $\frac{5+b}{2} = 3, \frac{a+7}{2} = 5 \Rightarrow b = 1, a = 3$

(28) $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right) = \ldots\ldots, 0 < x < \frac{\pi}{2}$

ઉકેલ : $\cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right), 0 < x < \frac{\pi}{2}$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}+\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}{\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)^2}-\sqrt{\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)^2}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{\left|\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right|+\left|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right|}{\left|\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right|-\left|\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right|}\right)$$

હવે, $0 < x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4}$ $\therefore \cos\frac{x}{2} > \sin\frac{x}{2}$ અને $\cos\frac{x}{2} > 0, \sin\frac{x}{2} > 0$

$$\therefore \cot^{-1}\left(\frac{\sqrt{1+\sin x}+\sqrt{1-\sin x}}{\sqrt{1+\sin x}-\sqrt{1-\sin x}}\right)$$

$$= \cot^{-1}\left(\frac{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)+\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}{\left(\cos\frac{x}{2}+\sin\frac{x}{2}\right)-\left(\cos\frac{x}{2}-\sin\frac{x}{2}\right)}\right) = \cot^{-1}\left(\frac{\cos\frac{x}{2}}{\sin\frac{x}{2}}\right)$$

$= \cot^{-1}\left(\cot\frac{x}{2}\right)$ અને $0 < \frac{x}{2} < \frac{\pi}{4} = \frac{x}{2}$

(30) $\binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{7} + \binom{10}{9} = \ldots\ldots$

(A) 2^9 (B) 2^{10} (C) 2^{10}-1 (D) આંમાથી એક પણ નહી.

Answer : A

ઉકેલ : $\binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots + \binom{n}{n-1} = 2^{n+1}$

$\therefore \binom{10}{1} + \binom{10}{3} + \binom{10}{5} + \binom{10}{7} + \binom{10}{9} = 2^9$