# PAPER - 7 SOLUTION

(1) $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)(1-\sin x)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)(\pi-2x)^3} = .......$

(A) 0 (B) 1/32 (C) ∞ (D) 1/8

Answer : B

ઉકેલ : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\left(1-\tan\frac{x}{2}\right)(1-\sin x)}{\left(1+\tan\frac{x}{2}\right)(\pi-2x)^3} = \lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)(1-\sin x)}{8\left(\frac{\pi}{2}-x\right)^3}$

$\frac{\pi}{2}-x=y$ લેતાં $x=\frac{\pi}{2}-y \Rightarrow \frac{x}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{y}{2}$ અને $x \Rightarrow \frac{\pi}{2} \Rightarrow \to 0$

તેથી માગેલ લક્ષ $\lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\tan\frac{y}{2}\left[1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-y\right)\right]}{8y^3}$

$= \lim\limits_{y \to 0} \dfrac{\tan\frac{y}{2} \times 2\sin^2\frac{y}{2}}{8y^3} = \lim\limits_{y \to 0} \left(\dfrac{\tan\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)\left(\dfrac{\sin\frac{y}{2}}{\frac{y}{2}}\right)^2 \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{32}$

(2) નીચેના પૈકી શેનું બિંદુ (1, 2, 3) થી અંતર $\sqrt{10}$ છે ?

ઉકેલ: ઊગમબિંદુથી અંતર $= \sqrt{1+4+9} = \sqrt{14}$ અને y - અક્ષ $= \sqrt{1+9} = \sqrt{10}$.

(3) $y = e^{a\sin x}$ (જ્યાં a સ્વૈર અચળ) જેનોવ્યાપક ઉકેલ હોય તે વિકલ સમીકરણ …. છે.

ઉકેલ : અહીં, $y = e^{a\sin x}$ $\therefore \log y = a \sin x$ …..

સમીકરણ (1) નું x વિશે વિકલન કરતાં,

(1) $\therefore \frac{1}{y}\frac{dy}{dx} = a\cos x \quad \therefore a = \frac{1}{y\cos x}$

સમીકરણ (1) માં a ની કિંમત મૂકતાં

$\therefore \log y = \left(\frac{1}{y\cos x}\frac{dy}{dx}\right)\sin x$

$\therefore y\log y = \tan x\frac{dy}{dx}$ જે માગેલ વિકલ સમીકરણ છે.

(4) 6 ભિન્ન નવલકથા અને 3 ભિન્ન શબ્દકોશ પૈકી 4 નવલકથા અને 1 શબ્દકોશ ને પસંદ કરી છાજલી પર એક હારમાં એવી રીતે ગોઠવો કે જેથી શબ્દકોશ હંમેશા વચ્ચે રહે, તો આવી ગોઠવણીઓની સંખ્યા કેટલી થાય ?

ઉકેલ : નવલકથાઓથી પસંદગી $\binom{6}{4}$ રીતે અને શબ્દકોશની પસંદગી $\binom{3}{1}$ રીતે કર્યા પછી.

4 નવલકથાઓને હારમાં 4 ! રીતે મૂક્યા પછી શબ્દકોશને વચ્ચે 1 રીતે ઘુસાડાય.

$\therefore$ આવી ગોઠવણી $\binom{6}{4}.\binom{3}{1}.4! = 15(3)(24) = 1080$ રીતે થાય,

જે ઓછામાં ઓછી 1000 છે તેમ કહેવાય.

(5) જો પાંચ અવલોકનો $x, x+2, x+4, x+6$ અને $x+8$ નો મધ્યક 11 હોય તો છેલ્લા ત્રણ અવલોકનોનો મધ્યક કેટલો થાય ?

(A) 11 (B) 13 (C) 15 (D) 17

Answer : B

ઉકેલ: $\because \dfrac{x+(x+2)+(x+4)+(x+6)+(x+8)}{5} = 11$

$\Rightarrow \dfrac{5x+20}{5} = 11 \Rightarrow x = 7$

$\therefore$ માંગેલો મધ્યક $= \dfrac{11+13+15}{3} = 13$

(6) સમગુણોત્તર શ્રેણીનું પાંચમું પદ 2 હોય, તો તેના 9 માં પદનો ગુણાકાર કેટલો થાય ?

(A) 256 (B) 512 (C) 1024 (D) આપેલ પૈકી એક પણ નહિ

Answer : B

ઉકેલ : સમગુણોત્તર શ્રેણીનાં 9 પદ $\frac{a}{r^4}, \frac{a}{r^3}, \frac{a}{r^2}, a, ar, ar^2, ar^3, ar^4$ લઈએ.

તેનું 5 મું પદ $a = 2$ અને આ 9 પદનો ગુણાકાર $a^9 = 2^9 = 512$

(8) $\int \dfrac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\,dx$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ: $I = \int \dfrac{\cos^3 x + \cos^5 x}{\sin^2 x + \sin^4 x}\,dx$ ; $I = \int \dfrac{(\cos^2 x + \cos^4 x)\cos x\,dx}{(\sin^2 x + \sin^4 x)}$

$\sin x = t \Rightarrow \cos x\,dx = dt$, $\cos^2 x = 1 - t^2$ મૂકતાં

$I = \int \dfrac{(1-t^2) + (1-t^2)^2\,dt}{t^2 + t^4}$

$= \int \dfrac{1-t^2+1-2t^2+t^4}{t^2+t^4}\,dt = \int \dfrac{2-3t^2+t^4}{t^2(1+t^2)}\,dt$

$t^2 = y$ લેતાં $\therefore \dfrac{2-3t^2+t^4}{t^2(1+t^2)}$

$= \dfrac{2-3y+y^2}{y(1+y)}; \quad \dfrac{(y^2-3y+2)}{y(1+y)} = 1 + \dfrac{A}{y} + \dfrac{B}{y+1}$

$y(y+1) + A(y+1) + By = y^2 - 3y + 2$ ; $y = -1$

$\Rightarrow -B = 6 \Rightarrow B = -6$ મૂકતાં

y ના સહગુણકો સરખાવતાં

$1 + A + B = -3$

$1 + A - 6 = -3$ ; $A \Rightarrow 2$

$$\therefore \frac{y^2 - 3y + 2}{y(y+1)} = 1 + \frac{2}{y} - \frac{6}{y+1} \; ; \; \frac{2 - 3t^2 + t^4}{t^2(1+t^2)}$$

$$= 1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{t+1}$$

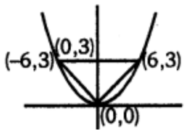
$$I = \int\left(1 + \frac{2}{t^2} - \frac{6}{t^2+1}\right) dt; \quad I = t - \frac{2}{t} - 6\tan^{-1}(t) + c$$

$$I = \sin x - \frac{2}{\sin x} - 6\tan^{-1}(\sin x) + c$$

અથવા $I = \sin x - 2(\sin x)^{-1} - 6\tan^{-1}(\sin x) + c$

(11) પરવલય $9x^2 - 6x + 36y + 9 = 0$ નું શિરોબિંદુ કયું થાય ?

ઉકેલ:




સમીકરણને નીચે મુજબ લખી શકાય.

$(3x - 1)^2 = -4(9y + 2)$ જેથી શિરોબિંદુ $(1/3, -2/9)$ હોય.

(12)

ઉકેલ : સમાંતર શ્રેણીનું pમું, qમું, r મું પદ

$$T_P = A + (p-1)D = \frac{1}{a}$$

$$T_q = A + (q-1)D = \frac{1}{b}$$

$$T_r = A + (r-1)D = \frac{1}{c}$$

$$= abc\begin{vmatrix} 1/a & 1/b & 1/c \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= abc\begin{vmatrix} A+(p-1)D & A+(q-1)D & A+(r-1)D \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$R_1 \to R_1 - D(R_2 - R_3) = abc\begin{vmatrix} A & A & A \\ p & q & r \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

(13) વર્તુળો $(x - a)^2 + y^2 = c^2$ અને $x^2 + (y - b)^2 = c^2$ ની સમાન જીવાની લંબાઈ .....

ઉકેલ : સમાન જીવાનું સમીકરણ :-

$[(x - a)^2 + y^2 - c^2] - [x^2 + (y - b)^2 - c^2] = 0$

$\Rightarrow 2ax - 2by - a^2 + b^2 = 0$ .........(1)

હવે $(p) = (a, 0)$ થી (1) પરના લંબની લંબાઈ

$$= \frac{2a^2 - a^2 + b^2}{\sqrt{4a^2 + 4b^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + b^2}$$

$\therefore$ સમાન જીવાની લંબાઈ $= 2\sqrt{c^2 - p^2}$

$$= 2\sqrt{c^2 - \frac{a^2 + b^2}{4}} = \sqrt{4c^2 - a^2 - b^2}$$

(14) જો $(x, 2)$ અને $(3, 4)$ બિંદુ વચ્ચેનું અંતર 2 હોય, તો x નું મૂલ્ય શોધો.

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 0

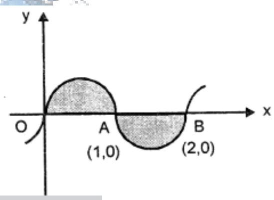
Answer : C

ઉકેલ: $2 = \sqrt{(x-3)^2 + (2-4)^2} \Rightarrow 2 = \sqrt{(x-3)^2 + 4}$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં $4 = (x-3)^2 + 4 \Rightarrow x - 3 = 0 \Rightarrow x = 3$

(15) વક્ર $y = x(x - 1)(x - 2)$ અને x - અક્ષ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ:




$$\text{માંગેલું ક્ષેત્રફળ} = \int_0^1 x(x-1)(x-2)\,dx + \left|\int_1^2 x(x-1)(x-2)\,dx\right|$$

$$= \frac{1}{4}(x^4 - 4x^3 + 4x^2)_0^1 + \frac{1}{4}\left|(x^4 - 4x^3 + 4x^2)_1^2\right|$$

$$= \frac{1}{4}[1 + |(16 - 32 + 16) - (1 - 4 + 4)|] = \frac{1}{2}$$

(16) જો $0 \le x \le 1.5$ હોય, તો $[x^2]$ નો વિસ્તાર શું થાય?

ઉકેલ: $0 \le x \le 1.5 \Rightarrow 0 \le x^2 \le 2.25$

$\Rightarrow [x^2]$ નો વિસ્તાર $= \{0, 1, 2\}$

(19) p : સુમન તેજસ્વી છે. q : સુમન ધનવાન છે. r : સુમન પ્રામાણિક છે. વિધાન ''જો સુમન ધનવાન હોય તો અને તો જ સુમન તેજસ્વી અને અપ્રમાણિક હોય'' નું નિષેધ વિધાન કેવી રીતે દર્શાવી શકાય છે ?

ઉકેલ : આપેલ વિધાન : $(p \wedge \sim r) \Leftrightarrow q$

p નું નિષેધ $\Leftrightarrow q$

$\sim(p \Leftrightarrow q)$, $\sim(q \Leftrightarrow p)$, $\sim p \Leftrightarrow q$ અને $\sim q \Leftrightarrow p$

જેથી આપેલા વિધાનનું નિષેધ $\sim((p \wedge \sim r))$ અને $\sim(p \wedge \sim r) \Leftrightarrow q$

(21) જો $\alpha$ એ વક્રો $y = a^x$ અને $y = b^x$, વચ્ચેનો છેદખૂણો હોય, તો $\tan\alpha$ બરાબર શું થાય

ઉકેલ: $y = a^x$ ; $y = b^x$

$$\frac{dy}{dx} = m_1 = a^x \log a \quad \frac{dy}{dx} = m_2 = b^x \log b \quad \text{solve it}$$

(22) ભારત એ ઓસ્ટ્રેલિયા અને વેસ્ટઈન્ડિઝ બંને સાથે બે મેચ રમે છે. ભારત 0.1 અને 2 પોઈન્ટ મેળવે તેની સંભાવના 0.45, 0.05 અને 0.50 છે. પરિણામ સ્વતંત્ર છે એમ ધારતાં, ભારત ઓછામાં ઓછા 7 પોઈન્ટ મેળવે તેની સંભાવના કેટલી?

ઉકેલ : ભારત દ્વારા રમાતી મેચોની સંખ્યા 4 છે. કોઈપણ મેચમાં મહત્તમ પોઈન્ટ 2 છે. માટે 4 મેચમાંથી મેળવાતા મહત્તમ પોઈન્ટ 8 થાય. માટે સંભાવના (P) = p (7) + p (8) $p(7) = {}^4C_1(0.05)(0.5)^3 = 0.0250$

$p(8) = (0.5)^4 = 0.0625$

$\Rightarrow P = 0.0875 \cdot$

(23) સમીકરણ $2\cos\left(\frac{x}{2}\right) = 3^x + 3^{-x}$ ના ઉકેલની સંખ્યા = ..........

ઉકેલ: $2\cos\frac{x}{2} = 3^x + 3^{-x}$

સમાનતા ત્યારે જ જળવાઈ રહે જયારે.

$\cos\frac{x}{2} = 1 \Rightarrow \frac{x}{2} = 0 \Rightarrow x = 0$ માત્ર એક જ ઉકેલ.

ઉકેલની સંખ્યા $= 1$

(24) જો $a_n = \sqrt{7+\sqrt{7+\sqrt{7+\ldots}}}$ માં n વર્ગમુળનાં ચિહ્ન હોય તો અનુમાનનાં સિદ્ધાંત દ્વારા દર્શાવો કે પ્રત્યેક $n \geq 1$ માટે વિધાન .... સત્ય છે.

ઉકેલ: અહીં, $a_1 = \sqrt{7} < 3$

$\therefore$ a અને b સત્ય નથી.

વળી, $a_2 = \sqrt{7+\sqrt{7}} > \sqrt{7+\sqrt{4}} = 3 \quad \therefore a_2 > 3 \quad \therefore$ (d) સત્ય નથી.

(26) શાંકવ $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ને રેખા $x\cos\alpha + y\sin\alpha = p$ ક્યારે સ્પર્શશે ?

ઉકેલ : જો $\frac{p}{\sin\alpha} = \pm\sqrt{b^2 + a^2\cot^2\alpha}$

અથવા $p^2 = b^2\sin^2\alpha + a^2\cos^2\alpha$ હોય તો $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

નો સ્પર્શક $y = -x\cot\alpha + \frac{p}{\sin\alpha}$ હોય.

(27) જો $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5$ હોય, તો .........

Answer : B

ઉકેલ: $z = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{i}{2}\right)^5 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{i}{2}\right)^5$

$= \left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5 + \left(\cos\frac{\pi}{6} - i\sin\frac{\pi}{6}\right)^5$

(28) સદિશ $\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ નો રેખા $\vec{r} = 3\hat{i}-\hat{j}+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$ પરનો પ્રક્ષેપ.........

ઉકેલ: સદિશ $\vec{a} = \hat{i}+\hat{j}+\hat{k}$ નું રેખા $\vec{r} = (3\hat{i}-\hat{j})+\lambda(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})$

પર પ્રક્ષેપણ બરાબર $\vec{a}$ નું રેખાને સમાંતર સદિશ પરનું પ્રક્ષેપણ

એટલેકે $\vec{b} = \hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k}$ એટલેકે $\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|} = \frac{(\hat{i}+\hat{j}+\hat{k}).(\hat{i}+2\hat{j}+3\hat{k})}{\sqrt{14}} = \frac{6}{\sqrt{14}}$