Paper - 6 Solutiuon

(2) $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^3}$ નું મૂલ્ય કેટલું થાય?

ઉકેલ: આપણી પાસે, $\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^3}$ છે.

$\Rightarrow \lim_{x\to 0}\left(1+\frac{\tan x - x}{x}\right)^{1/x^3} \Rightarrow e^{\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - x}{x}\cdot\frac{1}{x^3}}$

$\Rightarrow e^{\lim_{x\to 0}\frac{x+\frac{x^3}{3}+\frac{2}{15}x^5+\ldots\ldots-x}{x^4}} \Rightarrow e^{\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(\frac{1}{3}+\frac{2}{15}x+\ldots\right)}$ = અસ્તિત્વ ધરાવે નહિ.

(3) $\cos(\tan^{-1}x) = \ldots\ldots\ldots$

ઉકેલ: ધારો કે $\theta = \tan^{-1}x$

$\Rightarrow x = \tan\theta \quad \therefore \cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\theta}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

તેથી, $\cos\theta = \cos(\tan^{-1}x) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$

(5) અસમતા $n! > 2^{n-1}$ સાચું છે.
ઉકેલ : P(n): $n!\ x2^{n-1}$ હવે, P(1) અને P(2) સત્ય નથી, પણ P(3) સત્ય છે.
ધારો કે $P(k): K! > 2^{k-1}$, $k>2$ સત્ય છે.
$P(k+1): (k+1)! > 2^k$
L.H.S of P (K+1) = (k+1)! = k!(k+1) > 2k-1 (k+1) = 2^k.
$(k+1)/2 > 2^k$
$\therefore n > 2$

(7) જો $z^2 + z + 1 = 0$ હોય, તો $z^{100} + z^{-100} = \ldots\ldots$

ઉકેલ: $z^2+z+1=0$ નાં બીજ $\omega = \frac{-1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ અને $\omega^2 = \frac{-1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ છે.
અહીં, $\omega\cdot\omega^2 = 1$ પરથી $1/\omega = \omega^2$ હવે, $z^2 + z + 1 = 0$ ના બીજ ω માટે

$z^{100} + z^{-100} = (\omega)^{100} + \left(\frac{1}{\omega}\right)^{100}$

$= (\omega)^{100} + (\omega^2)^{100} = (\omega^3)^{33}.\omega + (\omega^3).\omega^2$

$= 1.\omega + 1.\omega^2 = \omega + \omega^2 = -1 \quad (\because 1+\omega+\omega^2) = 0$

(8) $\tan^{-1}\sqrt{\frac{a\lambda}{bc}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{b\lambda}{ca}} + \tan^{-1}\sqrt{\frac{c\lambda}{ab}}$, નું મૂલ્ય = ...

ઉકેલ: $\tan^{-1}a\sqrt{\frac{\lambda}{abc}} + \tan^{-1}b\sqrt{\frac{\lambda}{abc}} + \tan^{-1}c\sqrt{\frac{\lambda}{abc}}$

હવે, $\tan^{-1}a\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}} + \tan^{-1}b\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}} + \tan^{-1}c\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}}$

$\sqrt{\frac{a+b+c}{abc}} = y$ મૂક્તાં,

$\tan^{-1}ay + \tan^{-1}by + \tan^{-1}cy$

$= \pi - \tan^{-1}\left[\frac{ay+by+cy-abcy^3}{1-y^2(ab+bc+ca)}\right]$

$= \tan^{-1}y\left[\frac{a+b+c-abcy^2}{1-y^2(ab+bc+ca)}\right]$

હવે, $a+b+c = abcy^2 = \pi$

(10) વર્તુળ $x^2 + y^2 = 1$ અને વક્ર $|x| + |y| = 1$ વડે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ =

ઉકેલ: વર્તુળ $x^2 + y^2 = 1$ .... (1)
અને વક્ર $|x| + |y| = 1$ .... (2)
વક્ર (1) એ બંને અક્ષોની સાપેક્ષે સંમિત છે.

$\therefore$ માંગેલું ક્ષેત્રફળ $= \left|4\int_0^1 (y_1 - y_2)dx\right|$

$= 4\int_0^1 (\sqrt{1-x^2} - 1 + x)dx$

$= 4\left[\frac{x}{2}\sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2}\sin^{-1}x - x + \frac{x^2}{2}\right]_0^1$

$= 4\left[\left(\frac{\pi}{4} - 1 + \frac{1}{2}\right)\right] = 4\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\right] = (\pi - 2)$

(11)

જો a, b, c એ શુન્યતર સંખ્યા છે, તો $\Delta = \begin{vmatrix} b^2c^2 & bc & b+c \\ c^2a^2 & ca & c+a \\ a^2b^2 & ab & a+b \end{vmatrix}$ નુ મૂલ્ય = ...

ઉકેલ : R_1 ને a, R_2 ને b અને R_3 ને c વડે ગુણતા,

$$\Delta = \frac{1}{abc}\begin{vmatrix} ab^2c^2 & abc & ab+ac \\ a^2bc^2 & abc & bc+ab \\ a^2b^2c & abc & ac+bc \end{vmatrix}$$

$$= \frac{a^2b^2c^2}{abc}\begin{vmatrix} bc & 1 & ab+ac \\ ac & 1 & bc+ab \\ ab & 1 & ac+bc \end{vmatrix} = abc\begin{vmatrix} bc & 1 & \Sigma ab \\ ac & 1 & \Sigma ab \\ ab & 1 & \Sigma ab \end{vmatrix}$$

$\{\because C_3 \to C_3 + C_1\}$

$$= abc.\Sigma ab\begin{vmatrix} bc & 1 & 1 \\ ca & 1 & 1 \\ ab & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \quad [C_2 \equiv C_3].$$

(12) જો $f(x) = ax^3 + bx^2 + 11x - 6,\ x \in [1, 3]$ એ રોલના પ્રમેયની શરતોનું પાલન કરે અને $f'\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=0$ થાય, તો a અને b શોધો.

(A) 1, -6 (B) 1, 1 (C) 0, 6 (D) 6,-6

Answer : A

ઉકેલ : રોલના પ્રમેયનું પાલન થાય છે તેથી $f(1) = f(3)$

$\Rightarrow a + b + 11 - 6 = 27a + 9b + 33 - 6 \Rightarrow 13a + 4b + 11 = 0$ ….. (i)

હવે, $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 11 = 0$ $x=\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ આગળ

$x = \left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ આગળ

$$\Rightarrow f'\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = 3a\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 + 2b\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 11 = 0$$

$$= 3a\left[4+\frac{1}{3}+\frac{4}{\sqrt{3}}\right] + 2b\left(2+\frac{1}{\sqrt{3}}\right) + 11 = 0$$

$$= 13a + 4b + 11 + \frac{12a}{\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{3}} = 0 \Rightarrow \frac{12a}{\sqrt{3}} + \frac{2b}{\sqrt{3}} = 0$$

$\Rightarrow \frac{12a}{\sqrt{3}} = -\frac{2b}{\sqrt{3}} \Rightarrow b = -6a$ b ની કિંમત (1) માં મૂક્તાં

$13a + 4b + 11 = 0$

$\Rightarrow 13a + 4b + 11 = 0 \Rightarrow 13a - 24a + 11 = 0 \Rightarrow a = 1$ & $b = -6$

(13) વ્યક્તિ દ્વારા પક્ષીઓને મારી નાખવાની સંભાવના 3/4 છે તે 5 વાર પ્રયત્ન કરે છે. તો તે પક્ષીઓને ન મારી શકે તેવી સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : એક વ્યક્તિને દરેક વખતે ગણતરીમાં લેવામાં ન આવવાની સંભાવના $= \left(\frac{1}{4}\right)^5 = \frac{1}{1024}$.

(14)

$\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$ માટે એકબીજ - 9 હોય તો, આપેલ નિશ્ચાયકનાં બીજા બે બીજ ......હશે.

ઉકેલ: $\begin{vmatrix} x & 3 & 7 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow (x+9)\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & x & 2 \\ 7 & 6 & x \end{vmatrix} = 0,$ $R_1 \to R_1 + R_2 + R_3$ પરથી

$\Rightarrow (x+9)\{(x^2-12) - (2x-14) + (12-7x)\} = 0$

$\Rightarrow (x+9)(x^2 - 9x + 14) = 0$

$\Rightarrow (x+9)(x-2)(x-7) = 0$

તેથી બીજા બે $x = 2, 7$ હશે.

(1 6)

ઉકેલ : $\vec{a_1}\ (\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}}{|\vec{b}|^2} \Rightarrow \vec{a_2} = \vec{a} - \vec{a_1} = \vec{a} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}}{|\vec{b}|^2}$

$$\vec{a_1} \times \vec{a_2} = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}}{|\vec{b}|^2} \times \left(\vec{a} - \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\right) = \frac{(\vec{a}\cdot\vec{b})(\vec{b}\times\vec{a})}{|\vec{b}|^2}$$

(17) કોઈ પરવલય માટે નાભિ (2, 1) અને નિયામિકા $2x - 3y + 1 = 0$ હોય, તો નાભિલંબનું સમીકરણ શું થાય ?

ઉકેલ: કોઈપણ પરવલય માટે નાભિલંબ એ નિયામિકાને સમાંતર રેખા હોય.રેખાનું સમીકરણ $2x - 3y + k = 0$

કારણ કે તે નાભિકેન્દ્ર (2, 1) માંથી પસાર થાય છે, તો $2(2) - 3(1) + k = 0 \Rightarrow k = -1$

(18) જો વર્તુળ, બિંદુ (a, b) માંથી પસાર થાય અને વર્તુળ $x^2 + y^2 = 4$ ને લંબરૂપે છેદે, તો તેના કેન્દ્રનો બિંદુ પથ….

Wfu: ધારો કે ચલિત વર્તુળ $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ …… (i)

વર્તુળ (i) એ વર્તુળ $x^2 + y^2 - 4 = 0$ ને લંબરૂપે છેદે છે.

$\Rightarrow 2g.\,0 + 2f.0 = c - 4 \Rightarrow c = 4$

જ્યારે વર્તુળ (i) (a, b) માંથી પસાર થાય.

$\therefore a^2 + b^2 + 2ga + 2fb + 4 = 0$

$\therefore$ કેન્દ્ર $(-g, -f)$ નો બિંદુપથ $2ax + 2by - (a^2 + b^2 + 4) = 0$ છે.

(19) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos\pi x}{\tan^2 \pi x} = ...$

ઉકેલ : $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos\pi x}{\tan^2\pi x} = \lim_{x\to 1} \frac{1+\cos\pi x}{\sec^2\pi x - 1}$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{(1+\cos\pi x)\cos^2\pi x}{1-\cos^2\pi x}$$

$$= \lim_{x\to 1} \frac{\cos^2\pi x}{1-\cos\pi x} = \frac{(-1)^2}{1-(-1)} = \frac{1}{2}$$

(20) sin 3θ = 0 નો વ્યાપક ઉકેલ = ...

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $\sin\theta = 0$ તેથી $\theta = n\pi$

$\sin 3\theta = 0$ અથવા, $3\theta = n\pi;\ n \in I$

$$\sin 3\theta = 0 \Rightarrow 3\theta = n\pi\ ; n \in I \Rightarrow \theta = \frac{n\pi}{3}\ ; n \in I$$

(21) $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{7\pi}{7}$ નું મૂલ્ય = ...

(A) 1 (B) -1 (C) 1/2 (D) -3/2

Answer : D

ઉકેલ : $\cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + \cos\frac{7\pi}{7}$

$= \cos\frac{2\pi}{7} + \cos\frac{4\pi}{7} + \cos\frac{6\pi}{7} + (-1)$

$\because \alpha = \frac{2\pi}{7},\ \beta = \frac{2\pi}{7},\ n = 3$

$$= -1 + \frac{\cos\left(\frac{\frac{2\pi}{7} + \frac{6\pi}{7}}{2}\right)\sin\left\{\frac{3}{2}\cdot\frac{2\pi}{7}\right\}}{\sin\left\{\frac{\frac{2\pi}{7}}{2}\right\}}$$

$$= -1 + \frac{\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{3\pi}{7}}{\sin\frac{\pi}{7}} = -1 + \frac{\cos\frac{4\pi}{7}\sin\left(\pi - \frac{4\pi}{7}\right)}{\sin\frac{\pi}{7}}$$

$$= -1 + \frac{2\cos\frac{4\pi}{7}\sin\frac{4\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -1 + \frac{\sin\frac{8\pi}{7}}{2\sin\frac{\pi}{7}} = -1 + \left(\frac{-1}{2}\right) = -\frac{3}{2}$$

(22) જો પાંચ અવલોકનો x, x + 2, x + 4, x + 6 અને x + 8 નો મધ્યક 11 હોય તો છેલ્લા ત્રણ અવલોકનોનો મધ્યક કેટલો થાય ?

ઉકેલ: $\because \frac{x + (x+2) + (x+4) + (x+6) + (x+8)}{5} = 11$

$$\Rightarrow \frac{5x + 20}{5} = 11 \Rightarrow x = 7$$

$\therefore$ માંગેલો મધ્યક $= \frac{11 + 13 + 15}{3} = 13$

(26) સમીકરણ sin x - 3 sin 2x + sin 3x = cos x - 3 cos 2x + cos 3x નો વ્યાપક ઉકેલ = ...

ઉકેલ: $(\sin x + \sin 3x) - 3\sin 2x = \cos x + \cos 3x - 3\cos 2x$

$[2\sin 2x\cos x - 3\sin 2x] - [2\cos 2x\cos x - 3\cos 2x] = 0$

$\sin 2x[2\cos x - 3] - \cos 2x[2\cos x - 3] = 0$

$\cos x = \frac{3}{2}$ શક્ય નથી.

$\sin 2x = \cos 2x \quad \therefore \tan 2x = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$

$$2x = n\pi + \frac{\pi}{4} \quad \Rightarrow x = \frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{8}$$

(27) એક પથ્થર કે જેને લંબરૂપે ઉપર તરફ ફેંકતા તેની ગતિનું સમીકરણ s = 13.8t - 4.9t² છે કે જ્યાં s મીટરમાં અને t સેકન્ડમાં છે. તો સેકન્ડ t = 1 પર તેનો વેગ કેટલો હશે ?

ઉકેલ : $s = 13.8t - 4.9t^2$

તેનો વેગ $v = \frac{ds}{dt} = 13.8 - 9.8t$

માટે $\left(\frac{ds}{dt}\right)_{t=1} = 13.8 - 9.8 \times 1 = 4.0 = 4\text{m/sec.}$

(28)

બંનેને લંબ એકમ સદિશ $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ $\frac{\pi}{6}$ તો $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2$ = ...

ઉકેલ: |c| = 1, આપણી પાસે $|c|^2 = 1$ અથવા $c_1^2 + c_2^2 + c_3^2 = 1$ ......(i)

ફરીથી જ્યારે $c \perp a$ અને $c \perp b$, આપણી પાસે c.a = 0

$\Rightarrow a_1c_1 + a_2c_2 + a_3c_3 = 0$ ....(ii) અને c.b = 0 $\Rightarrow b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3 = 0$ ......(iii)

પણ જ્યારે a અને b વચ્ચેનો ખૂણો π/6 ત્યારે a. b = $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\Rightarrow |a|\ |b| \cos \pi/6 = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$

$\Rightarrow 3/4\ (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\ (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) = (a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2$ .....(iv)

હવે, $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 & a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 & 0 \\ b_1a_1 + b_2a_2 + b_3a_3 & b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ {(i), (ii) અને (iii)નો

$= \frac{1}{4}\left(a_1^2, a_2^2, a_3^2\right)\left(b_1^2 + b_3^2 + b_3^2\right)$ {(iv)નો ઉપયોગ કરતાં}

$= \frac{\left(\sum a_1^2\right)\left(\sum b_1^2\right)}{4} = \frac{1}{4}|\bar{a}|^2\ |b|^2$

જ્યાં $\sum a_1^2 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ અને $\sum b_1^2 = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$

(29) વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} - \sqrt{\frac{dy}{dx} - 3} = x$ નું પરિમાણ કેટલી છે ?

ઉકેલ : $\frac{d^2y}{dx^2} - \sqrt{\frac{dy}{dx} - 3} = x \Rightarrow \frac{d^2y}{dx^2} - x = \sqrt{\frac{dy}{dx} - 3}$

બંને બાજુ વર્ગ લેતાં $\left(\frac{d^2y}{dx^2} - x\right)^2 = \left(\frac{dy}{dx} - 3\right)$