Paper - 5 Solutiuon

(1) $\dfrac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1$ નો ઉકેલગણ .... છે.

ઉકેલ: અહીં, $\dfrac{\tan 3x - \tan 2x}{1 + \tan 3x \tan 2x} = 1 \quad \therefore \tan(3x - 2x) = 1 \therefore \tan x = \tan\dfrac{\pi}{4}$

$\therefore x = k\pi + \dfrac{\pi}{4}, k \in Z$ ઉકેલ હોઈ શકે.

પણ અહીં, $k = 0$ લેતાં, $x = \pi/4$, જેના માટે $\tan 2x$ ન મળે. તેથી આ ઉકેલ માટે સમીકરણ શક્ય નથી.

$\therefore$ સમીકરણનો ઉકેલગણ ϕ છે.

(2) પરવલય $y^2 = 4ax$ પર બિંદુ $(2a, 2\sqrt{2}\ a)$ આગળ દોરેલો કોઈ અભિલંબ હોય, તો અભિલંબ જીવાની લંબાઈ કેટલી થાય ?

ઉકેલ :અહીં $(2a, 2\sqrt{2}\ a)$ ને $(am^2 - 2am)$ સાથે સરખાવતાં આપણે $m = \sqrt{2}$ મળે.

હવે અભિલંબની લંબાઈ $= \dfrac{4a}{m^2}(1 + m^2)^{3/2} = \dfrac{4a}{2}(1 + 2)^{3/2} = 2a3\sqrt{3} = 6\sqrt{3}a$

(4) જો વક્ર $by^2 = (x + a)^3$ ના કોઈ પણ બિંદુ S આગળ અવાભિલંબ SN અને અવસ્પર્શક ST વચ્ચેનો સંબંધ $p(SN) = q(ST)^2$ હોય, તો p/q બરાબર શું થાય ?

ઉકેલ : જો કોઈપણ બિંદુ આગળનો વક્ર $by^2 = (x + a)^3$ છે.

sn = અવાભિલંબ, st = અવસ્પર્શક

$p(SN) = q(ST)^2$

$$\frac{p}{q} = \frac{(st)^2}{sn}$$

તેથી , $by^2 = (x + a)^3$

$$2by\frac{dy}{dx} = 3(x + a)^2$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3(x + a)^2}{2by}$$

$$S.N. = y \times \frac{dy}{dx} = \frac{3}{2}\frac{(x + a)^2}{b}$$

$$S.T. \Rightarrow \frac{2by^2}{3(x + a)^2}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{(ST)^2}{SN}$$

$$\frac{p}{q} = \frac{8b\{(x + a)^3\}^2}{27(x + a)^6} \Rightarrow \frac{p}{q} = \frac{8b}{27}$$

(6) 75° બરાબર શું થાય ?

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે, $180^\circ = \pi^C$

$$\Rightarrow 75^\circ = \left(75 \times \frac{\pi}{180}\right)^c = \left(\frac{5\pi}{12}\right)^c$$

(8)

$\sin x + \cos x = \min\limits_{a \in R}\{1, a^2 - 4a + 6\}$ માટે x ના અતિ વ્યાપક મૂલ્યો = ...

ઉકેલ: હવે , $a^2 - 4a + 6 = (a - 2)^2 + 2 > 1$

તેથી ન્યૂનતમ $\min\limits_{a \in R}\{1, a^2 - 4a + 6\} = 1 \Rightarrow \sin x + \cos x = 1$

$$= \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin\frac{\pi}{4}$$

$$x + \frac{\pi}{4} = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4} \Rightarrow x = n\pi + (-1)^n\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}$$

(9) જો પ્રાચલો s અને t વાળી અનુક્રમે સુરેખાઓ $x = 1 + s$, $y = -3 - \lambda s$, $z = 1 + \lambda s$ અને $x = t/2$, $y = 1, + t$, $z = 2 - t$, સમતલીય હોય, તો λ......

ઉકેલ : આપણી પાસે , $\dfrac{x - 1}{1} = \dfrac{y + 3}{-\lambda} = \dfrac{z - 1}{\lambda} = s$ અને $\dfrac{x - 0}{1/2} = \dfrac{y - 1}{1} = \dfrac{z - 2}{-1} = t$

જયારે, રેખાઓ સમતલીય હોય, ત્યારે

$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} -1 & 4 & 1 \\ 1 & -\lambda & \lambda \\ 1/2 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 0 \text{ ઉકેલતાં } \lambda = -2$$

(10)

વક્ર $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ ના બિંદુ (x_1, y_1) આગળના સ્પર્શકના યામાક્ષ પરના અંત :ખંડની લંબાઈ કેટલી થાય ?

ઉકેલ : $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$

તેથી $\left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = -\sqrt{\dfrac{y_1}{x_1}}$

$$\therefore x\text{ - અંત :ખંડ} = x_1 - \left\{\frac{y_1}{\left(-\sqrt{\frac{y_1}{x_1}}\right)}\right\}$$

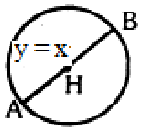
$$= x_1 + \sqrt{x_1 y_1} = \sqrt{x_1}\left(\sqrt{x_1} + \sqrt{y_1}\right)$$

$$= \sqrt{ax_1} \quad (\because \sqrt{x_1} + \sqrt{y_1} = \sqrt{a})$$

અને y - અંત :ખંડ $= y_1 - x_1\left(-\sqrt{\dfrac{y_1}{x_1}}\right) = y_1 + \sqrt{x_1 y_1} = \sqrt{ay_1}$

(11) વર્તુળ $x^2 + y^2 - 2x = 0$ દ્વારા રેખા $y = x$ પરનો અંતઃખંડ AB છે. AB વ્યાસના વર્તુળનું સમીકરણ....

ઉકેલ:



વર્તુળ $x^2 + y^2 - 2x = 0$ ...... (i) અને રેખા $y = x$ આપેલ છે. ..... (ii)

$y = x$ ને (i) માં મૂકતાં $2x^2 - 2x = 0 \Rightarrow x = 0, 1$ મળે.

(i) પરથી $y = 0, 1$

ધારો કે $A = (0, 0)$, $B = (1, 1)$ માંગેલ વર્તુળનું સમીકરણ :

$(x - 0)(x - 1) + (y - 0)(y - 1) = 0$ અથવા $x^2 + y^2 - x - y = 0$

(12) જો કોઈ ઘટના બનવાની શક્યતા 3 : 5, હોય તો ઘટના ન બનવાની શક્યતા કેટલી?

ઉકેલ : માંગેલ સંભાવના $= 1 - \frac{3}{8} = \frac{5}{8}.$

(14) Δ ABC માં $\frac{\cos C + \cos A}{c + a} + \frac{\cos B}{b} =$ ....

(A) 1/a (B) 1/b (C) 1/c (D) c + a/b

Answer : A

ઉકેલ : $\frac{\cos C + \cos A}{c + a} + \frac{\cos B}{b}$

$= \frac{b\cos C + b\cos A + c\cos B + a\cos B}{b(c + a)}$

$= \frac{(b\cos C + c\cos B) + (b\cos A + a\cos B)}{b(c + a)} = \frac{a + c}{b(c + a)} = \frac{1}{a}$

(15) અતિવલય $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ પર બહારના બિંદુમાંથી દોરવામાં આવતા અભિલંબની સંખ્યા......

ઉકેલ : અતિવલય પર દોરેલા કોઇ અભિલંબનું સમીકરણ

$y = mx - \frac{m\left(a^2 + b^2\right)}{\sqrt{a^2 - b^2m^2}} \Rightarrow \left(a^2 - b^2m^2\right)(y - mx)^2 = m^2\left(a^2 + b^2\right)^2$

જો તે બિંદુ $(x_1 y_1)$ માંથી પસાર થતી હોય તો $(a^2 - b^2m^2)(y_1 - mx_1)^2 = m^2(a^2 + b^2)^2$

તે m માં 4 ઘાતનું સમીકરણ છે. તેથી m ની 4 મૂલ્યો આપે છે. બિંદુ (x_1, y_1) માંથી દોરેલા અભિલંબ માટે તેને સંગત 4 મૂલ્યો.

(16)

જો $\vec{a} = -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}$, $\vec{b} = 2\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k}$ તો નીચેની શરતોને સ્વીકારતો સદિશ $\vec{c}$

(i) તે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ સામે સમતલીય હોય (ii) તે $\vec{b}$, ને લંબ હોય, (iii) $\vec{a} \cdot \vec{c} = 7$

ઉકેલ : માંગેલો સદિશ $\vec{c}$ એ સદિશ $\vec{\alpha}$ ને સમાંતર છે.

$\vec{\alpha} = \vec{b} \times \left(\vec{a} \times \vec{b}\right) \Rightarrow \vec{\alpha} = |\vec{b}|^2 - \left(\vec{b} \cdot \vec{a}\right)\vec{b}$

$\Rightarrow \vec{\alpha} = 5\left(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) + 2\hat{i} + 0\hat{j} + \hat{k} = -3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}$

$\therefore \vec{c} = \lambda\vec{\alpha}$ સમાન સદિશ λ માટે

$\Rightarrow \vec{c} = \lambda\left(-3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}\right)$ હવે, $\vec{a} \cdot \vec{c} = 7$

$\Rightarrow \left(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k}\right) . \lambda\left(-3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}\right) = 7$

$\Rightarrow \lambda(3 + 5 + 6) = 7 \Rightarrow \lambda = 1/2$

આથી, $\vec{c} = \frac{1}{2}\left(-3\hat{i} + 5\hat{j} + 6\hat{k}\right)$

(17) જો વક્ર $y = a\sqrt{x} + bx$ એ (1, 2) માંથી પસાર થાય અને વક્ર, રેખા $x = 4$ અને x - અક્ષ વડે 8 ચોરસ એકમ હોય તો ....

ઉકેલ : વક્ર $y = a\sqrt{x} + bx$ .... (1)

સમીકરણ (1) દ્વારા $y = 0$ મૂકીએ, તો સમીકરણ (1) દ્વારા $a\sqrt{x} + bx = 0$

$\Rightarrow x = 0, \frac{a^2}{b^2}$ ઘેરાતુ ક્ષેત્રફળ $= \int_0^4 y\,dx = 8$

$\Rightarrow \int_0^4 (a\sqrt{x} + bx)\,dx = 8 \Rightarrow \left[\frac{2}{3}ax^{3/2} + b\frac{x^2}{2}\right]_0^4 = 8$

$\Rightarrow \frac{16}{3}a + 8b = 8 \Rightarrow 2a + 3b = 3$ .... (2)

વક્ર (1) એ (1, 2) માંથી પસાર થાય છે, તો

$a + b = 2$ .... (3)

સમીકરણ (1) અને (2) દ્વારા $a = 3, b = -1$

(18) જો $\cos\alpha = -0.6$ અને $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ તો $\tan\frac{\alpha}{4} =$ ....

ઉકેલ : $\tan^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1 - \cos\alpha}{1 + \cos\alpha} = \frac{1 - (-0.6)}{1 + (-0.6)} = \frac{1.6}{0.4} = 4$ અને

$\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$ $\therefore \tan\frac{\alpha}{2} < 0$ $\therefore \tan\frac{\alpha}{2} = -2$

$\therefore \sec^2\frac{\alpha}{2} = 1 + \tan^2\frac{\alpha}{2} = 1 + 4 = 5$

અને $\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha}{2} < \frac{3\pi}{4}$ $\therefore \sec\frac{\alpha}{2} = -\sqrt{5}$ $\therefore \cos\frac{\alpha}{2} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$

હવે, $\tan^2\frac{\alpha}{4} = \frac{1 - \cos\frac{\alpha}{2}}{1 + \cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{1 - \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}{1 + \left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)}$

$= \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} - 1} . \frac{\sqrt{5} + 1}{\sqrt{5} + 1} = \frac{(\sqrt{5} + 1)^2}{4}$

વળી $\frac{\pi}{4} < \frac{\alpha}{4} < \frac{3\pi}{8}$ $\therefore \tan\frac{\alpha}{4} > 0$ $\therefore \tan\frac{\alpha}{4} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}$

(19) જો રેખા $2x - 3y = k$ પરવલય $y^2 = 6x$ ને સ્પર્શે તો k નું મૂલ્ય કેટલું થાય ?

ઉકેલ : આપેલ $x = \dfrac{3y + k}{2}$

અને $y^2 = 6x$

$\Rightarrow y^2 = 6\left(\dfrac{3y+k}{2}\right) \Rightarrow y^2 = 3(3y + k) \Rightarrow y^2 - 9y - 3k = 0$

જો રેખા (1) એ પરવલય (2) ને સ્પર્શે તો દ્વિઘાત સમીકરણ (3) ના બીજ સમાન મળે.

$\therefore (-9)^2 = 4 \times 1 \times (-3k) \Rightarrow k = -\dfrac{27}{4}$

(20) બિંદુ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ માંથી વર્તુળ $x^2 + y^2 = 9$ ના અભિલબનું સમીકરણ....

ઉકેલ: આપણે જાણીએ છીએ કે વર્તુળ $x^2 + y^2 = a^2$ ના બિંદુ (x_1, y_1) આગળના નાભિલંબનું સમીકરણ $\dfrac{x}{x_1} - \dfrac{y}{y_1} = 0$ છે.

તેથી, $\dfrac{x}{1/\sqrt{2}} - \dfrac{y}{1/\sqrt{2}} = 0 \Rightarrow x - y = 0$

(21) રેખા $x = at^2$ એ ઉપવલય $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ ને વાસ્તવિક બિંદુઓમાં ક્યારે મળે ?

ઉકેલ : ઉપવલયના સમીકરણમાં $x = at^2$ મુકતાં: $\dfrac{a^2t^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

$\Rightarrow y^2 = b^2\left(1 - t^4\right)y^2 \quad b^2(1 - t)^2(1 + t)^2$

જો $(1 - t)^2 \geq 0 \Rightarrow |t| \leq 1$ તો આ y નું વાસ્તવિક મુલ્ય આપશે.

(22) ત્રણ એકસમાન પાસા નાંખવામાં આવે છે તો તે દરેકમાં સમાન સંખ્યા દેખાવવાની સંભાવના કેટલી થાય

ઉકેલ : કેટલીક સંખ્યાઓ 6 રીતે જોવા મળે છે.

આથી માંગેલ સંભાવના $= \dfrac{6}{216} = \dfrac{1}{36}$

(23) જો MISSISSIPPI શબ્દના બધા અક્ષરોને ફરીવાર ગોઠવવામાં આવે તો બધા S સાથે આવવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : આપેલ શબ્દ 11 અક્ષરો ધરાવે છે, જે પૈકી ચાર S, ચાર I, બે P અને એક M છે.

આથી કુલ શબ્દોની સંખ્યા $= \dfrac{11!}{4!\,4!\,2!}$

જ્યારે ચાર S એક સાથે આવે તો, તો પ્રથમ શબ્દથી બીજા શબ્દથી, ..., આઠમાં શબ્દથી શરૂ થઈ શકે.

આવા દરેક કિસ્સામાં બાકીના સાત અક્ષરો $\dfrac{7!}{4!\,2!}$ રીતે બની શકે.

આથી ચાર $S = 8 \cdot \dfrac{7!}{4!\,2!}$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= \dfrac{\dfrac{8 \times 7!}{4!\,2!}}{\dfrac{11!}{4!\,4!\,2!}} = \dfrac{4}{165}$

(24) બે વર્તુળો $x^2 + y^2 - x + 1 = 0$ અને $3(x^2 + y^2) + y - 1 = 0$ ની મૂલાક્ષનું સમીકરણ .....

ઉકેલ : આપેલ સમીકરણોને નીચે મુજબ લખી શકાય.

$3x^2 + 3y^2 - 3x + 3 = 0$

$3x^2 + 3y^2 + y - 1 = 0$

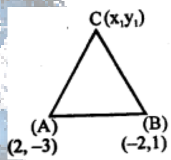
હવે, માંગેલ સમીકરણ $S - S' = 0$ દ્વારા મેળવી શકાય.

$\Rightarrow --3x + 3 - y + 1 = 0$

$\Rightarrow 3x + y - 4 = 0$

(25) ધારો કે A (2, -3) અને B (-2, 1) ત્રિકોણ ABC ના શિરોબિંદુઓ છે. જો આ ત્રિકોણનું ક્ષેત્રકેન્દ્ર (મધ્યકેન્દ્ર) $2x + 3y = 1$ રેખા પર ખસેડવામાં આવે તો શિરોબિંદુ C નો બિંદુપથ કઈ રેખા હશે ?

ઉકેલ:



ધારો કે ત્રીજું શિરોબિંદુ (x_1, y_1) છે, તો

મધ્યસ્થ (G) $\equiv \left(\dfrac{x_1 + 2 - 2}{3}, \dfrac{y_1 - 3 + 1}{3}\right)$ એટલે કે G $\left(\dfrac{x_1}{3}, \dfrac{y_1 - 2}{3}\right)$

ત્રિકોણનું મધ્યકેન્દ્ર રેખા $2x + 3y = 1$ પર ગતિ કરે છે, તે આવેલું છે.

$\therefore 2\left(\dfrac{x_1}{3}\right) + 3\left(\dfrac{y_1 - 2}{3}\right) = 1$

એટલે કે $2x_1 + 3y_1 = 9$

(x_1, y_1) નો બિંદુપથ $2x + 3y = 9$ છે.

(29) બિંદુ P(3, 4)માંથી ઉપવલય $\dfrac{x^2}{9} + \dfrac{y^2}{4} = 1$ પર દોરેલા સ્પર્શકો ઉપવલયને બિંદુઓ A અને B આગળ સ્પર્શક છે. જે બિંદુનું P બદુથી અને રેખા થી અંતર સમાન હોય, તે બિંદુના બિંદુપથનું સમીકરણ.....

ઉકેલ: રેખા AB નું સમીકરણ $x + 3y = 3$ હવે કોઈ બિંદુ (h, k) લેતાં,

પ્રશ્ન અનુસાર : $\left|\dfrac{h + 3k - 3}{\sqrt{1^2 + 3^2}}\right| = \sqrt{(h-3)^2 + (4-k)^2}$

ઉકેલ્યા પછી, $9x^2 + y^2 - 6xy - 54x - 62y + 241 = 0$