Paper - 4 Solution

(1) $\int \frac{dx}{\{(x-1)^3 (x+2)^5\}^{\frac{1}{4}}} = ...$

ઉકેલ : $I = \int \frac{dx}{\left\{\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^3 (x+2)^8\right\}^{\frac{1}{4}}}$

$= \int \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{(x+2)^2} dx$

હવે, $\frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) = \frac{1(x+2)-1(x-1)}{(x+2)^2} = \frac{3}{(x+2)^2}$

$\therefore I = \frac{1}{3} \int \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{-\frac{3}{4}} \cdot \frac{d}{dx}\left(\frac{x-1}{x+2}\right) dx$

$= \frac{1}{3} \times 4 \left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{4}} + c = \frac{4}{3}\left(\frac{x-1}{x+2}\right)^{\frac{1}{4}} + c$

(2) રેખા $x + y = 4$ પરના બે બિંદુઓ કે જે રેખા $4x + 3y = 10$ થી એકમ અંતરે આવેલી છે તો તે બે બિંદુઓ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે માંગેલ બિંદુ (x_1, y_1) હોય, તો $x_1 + y_1 = 4$ ….. (1)

ઉપરાંત $\pm \frac{4x_1 + 3y_1 - 10}{\sqrt{16+9}} = 1$

$\Rightarrow 4x_1 + 3y_1 = 15$ …….. (2)

$\Rightarrow 4x_1 + 3y_1 = 5$ …….. (3)

(1) અને (2) પરથી $x_1 = 3, y_1 = 11$ મળે છે.

(1) અને (3) પરથી $x_1 = -7, y_1 = 11$ મળે છે.

$\therefore$ માંગેલ બિંદુઓ (3, 1), (-7, 11) છે.

(3) જો A એ એક કક્ષાનો કોઇ પણ વિસંમિત શ્રેણિક હોય તો |A|

(A) -1 (B) 0 (C) 1 (D) આપેલ પેકી એક પણ નહી

Answer : B

(5) $\frac{d(\sec x + \tan x)}{dx(\sec x - \tan x)} = ...$

ઉકેલ : $\frac{d}{dx} = \frac{(\sec x + \tan x)}{(\sec x - \text{tnax})} = \frac{d}{dx}\left(\frac{1+\sin x}{1-\sin x}\right)$

$= \frac{(1-\sin x)\cos x - (1+\sin x).(-\cos x)}{(1-\sin x)^2} = \frac{2\cos x}{(1-\sin x)^2}$

(6) $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$ નું મૂલ્ય કેટલું થાય?

ઉકેલ : આપણી પાસે, $\lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$ છે.

$= \lim\left(1 + \frac{\sin x - x}{x}\right)^{\frac{\sin x}{x - \sin x}}$

$\times \frac{\sin x}{x - \sin x} = e^{-\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}} = e^{-1}$

…ગમબિંદુમાંથી દોરેલ લંબ x - અક્ષ સાથે 30 નો ખૂણો બનાવે અને જે

…ક્ષેત્રફળનો ત્રિકોણ બનાવે તે રેખાઓનું સમીકરણ …..

…રો કે ઉદ્‌ગમબિંદુથી આપેલ રેખા પરના લંબની લંબાઈ p છે. તો સમાન

…તેનું સમીકરણ

…$^\circ + y\sin 30^\circ = p$ અથવા $\sqrt{3}x + y = 2P$

…ોને A $\left(\frac{2p}{\sqrt{3}}, 0\right)$ અને B(0, 2p).

…B નું ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\left(\frac{2p}{\sqrt{3}}\right) 2p = \frac{2p^2}{\sqrt{3}}$

…વડે $\frac{2p^2}{\sqrt{3}} = \frac{50}{\sqrt{3}} \Rightarrow p = \pm 5$

…ઓ $\sqrt{3}x + y \pm 10 = 0$ છે.

… 14 + 30 + 52 + 80 + 114 +…… શ્રેઢીના n માં પદ કયું હશે?

…ારો કે શ્રેણીનું n^{th} મું પદ T_n છે અને

…4 + 14 + 30 + 52 + 80 + 114 +……+ T_n ..(i)

… 4 + 14 + 30 + 52 + 80 + …..+ T_n ….(ii)

(i) માંથી (ii) બાદ કરતાં

0 = (4 + 10 + 16 + 22 + 28 + 34 + ….n પદો) - T_n

T_n = 4 + 10 + 16 + 22 + …..n પદો

$= \frac{n}{2}[2 \times 4 + (n-1)6] = n(3n+1) = 3n^2 + n$

(11) જો $\omega \neq 1$ એ એક સંખ્યાનું ઘનમૂળ અને $i = \sqrt{-1}$ હોય, તો નિશ્ચાયક $\begin{vmatrix} 1 & 1+i+\omega^2 & \omega^2 \\ 1-i & -1 & \omega^2-1 \\ -i & -i+\omega-1 & -\omega^3 \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $R_1 \to R_1 + R_3$
તો R_2 અને R_1 સમાન હોય $\therefore$ નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય શૂન્ય થાય.

(12) 4 જોડકાં (પતિ અને પત્ની)એ 4 સભ્યોની સમિતી બનાવવાનું નક્કી કર્યું. તો કેટલી ભિન્ન સમિતી કરી શકાય કે જેમાં જોડકાં સ્થાન મેળવી શકતા નથી ?

ઉકેલ : 4 શ્રીમાનોની સમિતિની સંખ્યા = ${}^4C_4 = 1$
3 શ્રીમાનો અને 1 શ્રીમતીની સમિતિની સંખ્યા = ${}^4C_3 \times {}^1C_1$
(કારણ કે 3 શ્રીમાનોની પસંદગી પછી માત્ર 1 શ્રીમતી બાકી રહે કે જેનો સમાવેશ થઈ શકે.)
2 શ્રીમાનો અને 2 શ્રીમતીની સમિતીની સંખ્યા = ${}^4C_2 \times {}^2C_2$
1 શ્રીમાનો અને 3 શ્રીમતીની સમિતીની સંખ્યા = ${}^4C_1 \times {}^3C_3$
4 શ્રીમતીની સમિતિની સંખ્યા = 1 = ${}^4C_4 = 1$
$\therefore$ માંગેલ સમિતિની સંખ્યા = 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 16

(13) વિધેય: $f: N \to N, f(x) = 2x + 3$ એ કેવું વિધેય છે?
ઉકેલ: f એક એક છે કારણકે $x_1, x_2 \in N; x_1 \neq x_2$
$\Rightarrow 2x_1 + 3 \neq 2x_2 + 3 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

તેમ છતાં $f^{-1}(x) = \dfrac{x-3}{2} \notin N$ (પ્રદેશ) જ્યાં $x = 1, 2, 3$ વગેરે.

$\therefore f$ અવ્યાપ્ત છે કે જે દર્શાવે છે કે f એક એક અવ્યાપ્ત છે.

(14) $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \dfrac{\pi}{2}$, તો $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz$ ની કિંમત ?

ઉકેલ : $\sin^{-1}x + \sin^{-1}y + \sin^{-1}z = \dfrac{\pi}{2}$

ધારો કે $\sin^{-1}x = \alpha,\ \sin^{-1}y = \beta,\ \sin^{-1}z = \gamma$

$\therefore \alpha + \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$

અથવા $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2} - \gamma$ અથવા $\cos(\alpha + \beta) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \gamma\right)$

$\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \sin\gamma$......(i) અને $\sin\alpha = x \ \Rightarrow \cos\alpha = \sqrt{1-x^2}$

આ જ રીતે, $\cos\beta = \sqrt{1-y^2}$

$\therefore$ સમીકરણ (i) પરથી, $\sqrt{1-x^2}.\sqrt{1-y^2} = xy + z$

બંને બાજુ વર્ગ લેતા $x^2 + y^2 + z^2 + 2xyz = 1$.

(15) જો p = 7i - 2j + 3k અને q = 3i + j + 5k, તો |p - 2q| = ...

ઉકેલ : p - 2q = i - 4j - 7k

$|p - 2q| = \sqrt{49 + 16 + 1} = \sqrt{66}$

(16) ઉગમબિંદુમાંથી પસાર થતા અને બિંદુઓ (1, 0) અને (3, 0) આગળ નાભિઓ ધરાવતા ઉપવલયનું સમીકરણ .....

ઉકેલ : કેન્દ્ર એ નાભિઓનું મધ્યબિંદુ થાય. કેન્દ્ર $\left(\dfrac{1+3}{2}, 0\right) = (2, 0)$

નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર $2ae = 2$

$ae = 1$ અથવા $a^2 - b^2 = 1$ ....(1)

જો ઉપવલય $\dfrac{(x-2)^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ હોય અને જો તે $(0, 0)$માંથી પસાર થાય, તો $\dfrac{4}{a^2} = 1 \Rightarrow a^2 = 4$

(1) પરથી $b^2 = 3$ જેથી $\dfrac{(x-2)^2}{4} + \dfrac{y^2}{3} = 1$ અથવા $3x^2 + 4y^2 - 12x = 0$

(17) જો A શ્રેણિક હોય કે જેથી 7A નો વ્યસ્ત શ્રેણિક $\begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$ હોય તો A =.........

ઉકેલ : $(7A)^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}$

$((7A)^{-1})^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -7 \end{bmatrix}^{-1}$ $\quad 7A = \dfrac{-1}{1}\begin{bmatrix} -7 & -2 \\ -4 & -1 \end{bmatrix}$

$A = \dfrac{1}{7}\begin{bmatrix} 7 & 2 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{2}{7} \\ \frac{4}{7} & \frac{1}{7} \end{bmatrix}$

(18) m ના પૂર્ણાંક મૂલ્યોની સંખ્યા શોધો કે જે રેખાઓ 3x + 4y = 9 અને y = mx + 1 ના છેદબિંદુનો યામ બનાવે છે.

ઉકેલ : $3x + 4y = 9,\ y = mx + 1$ ને ઉકેલતાં $x = \dfrac{5}{3+4m}$ મળે.

જો $3m + 4m = 1, -1, 5, -5$ હોય, તો x પૂર્ણાંક મળે.

$\therefore m = \dfrac{-2}{4}, \dfrac{-4}{4}, \dfrac{2}{4}, \dfrac{-8}{4}$.

m પાસે બે સંપૂર્ણ મૂલ્ય છે

(20) જો $(x - 2y + 3z)^n$ ના વિસ્તરણમાં કુલ પદોની સંખ્યા 45 છે તો n=.........

ઉકેલ: $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2} = 45$ અથવા $n^2 + 3n - 88 = 0 \Rightarrow n = 8$.

(21) $x = 3$ હોય ત્યારે $\sqrt{x^2+16}$ નો $\dfrac{x}{x-1}$ ની સાપેક્ષ બદલવાનો દર ...... છે.

ઉકેલ : ધારો કે $u = \sqrt{x^2+16}$ અને $v = \dfrac{x}{x-1}$

$\therefore \dfrac{du}{dx} = \dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}}$ $\quad \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{(x-1)(1) - x(1)}{(x-1)^2}$

$\therefore \dfrac{dv}{dx} = \dfrac{-1}{(x-1)^2}$ $\therefore \dfrac{du}{dv} = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+16}} \times \dfrac{(x-1)^2}{-1}$

$x = 3$ હોય ત્યારે $u = \sqrt{x^2+16}$ નો $v = \dfrac{x}{x-1}$ ની સાપેક્ષ બદલવાનો દર

$= \left(\dfrac{du}{dv}\right)_{x=3} = \dfrac{3}{\sqrt{9+16}} \times \dfrac{(3-1)^2}{-1} = -\dfrac{12}{5}$

(22) જો નિયામિકાઓ વચ્ચેનું અંતર એ નાભિઓ વચ્ચેના અંતર કરતા ત્રણ ગણું હોય, તો ઉપવલયની ઉત્કેન્દ્રતા.....

ઉકેલ : શરત અનુસાર $\dfrac{2a}{e} = 6ae \Rightarrow e = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(23) રેખા r = 2i - 2j + 3k + λ (i - j + 4k) અને સમતલ r. (i + 5j + k) = 5 વચ્ચેનું અંતર કેટલુ ?

ઉકેલ : માંગેલ અંતર $= \left|\dfrac{d - a.n}{|n|}\right| = \left|\dfrac{5 - (2i - 2j + 3k).(i + 5j + k)}{\sqrt{1+25+1}}\right|$

$= \left|\dfrac{5 - (2 - 10 + 3)}{\sqrt{27}}\right| = \dfrac{10}{3\sqrt{3}}$.

(24) જો $x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$ શ્રેણીનો મધ્યક $\overline{x}$, હોય તો $x_i + 2i$, I = 1, 2, ..., n નો મધ્યક કેટલો થશે ?

ઉકેલ: આપ્યા મુજબ $\overline{x} = \dfrac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n}$

જો $x_i + 2i,\ i = 1, 2, \ldots\ldots, n$ શ્રેણીનો મધ્યક $\overline{X}$ હોય, તો

$$\overline{X} = \frac{(x_1 + 2) + (x_2 + 2.2) + (x_3 + 2.3) + \ldots\ldots + (x_n + 2.n)}{n}$$

$$= \frac{x_1 + x_2 + \ldots\ldots + x_n}{n} + \frac{2(1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n)}{n}$$

$= \overline{x} + \dfrac{2n(n+1)}{2n}$ (1) પરથી $= \overline{x} + n + 1$

(26) જો $(1 + x)^{2n} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}$ હોય, તો.....

ઉકેલ : $a_0 + a_1 + a_2 \ldots\ldots 2^{2n}$ અને $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots\ldots 2^{2n-1}$

$a_n = {}^{2n}C_n$ = ગુરૂત્તમ સહ ગુણક મધ્યમ સહ ગુણાંક હોય

$a_{n-3} = {}^{2n}C_{n-3} = {}^{2n}C_{2n-(n-3)} = {}^{2n}C_{n+3} = a_{n+3}$

(27)

જો $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ એકમ સદિશો હોય, તો $|\vec{a} - \vec{b}|^2 + |\vec{b} - \vec{c}|^2 + |\vec{c} - \vec{a}|^2$ કોના કરતા વધારે ન હોય.

ઉકેલ: $|a - b|^2 + |b - c|^2 + |c - a|^2$

$= 2(a^2 + b^2 + c^2) - 2(a.b + b.c + c.a)$

$= 2 \times 3 - 2(a.b + b.c + c.a)$

$= 6 - \{(a + b + c)^2 - a^2 - b^2 - c^2\} = 9 - |a + b + c|^2 \leq 9$

(29) જો $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix}$ અને $\begin{vmatrix} c & d \\ -d & c \end{vmatrix}$ = નાં ગુણાકારમાં A, B પ્રથમ હારના ઘટકો હોય, તો બીજી હારના ઘટકો કયા હશે ?

ઉકેલ : $\begin{vmatrix} a & b \\ -b & a \end{vmatrix} \begin{vmatrix} c & d \\ -d & c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ac + bd & -ad + bc \\ -bc + ad & bd + ac \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} ac + bd & bc + ad \\ -(bc - ad) & ac + bd \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A & B \\ -B & A \end{vmatrix}$

$\therefore$ માંગેલા ઘટકો $-B, A$

(30) $\displaystyle\sum_{1<p<100} p! - \sum_{n=1}^{50} (2n)!$ નો એકમનો અંક......છે.

ઉકેલ : જો $p \geq 5$ તો $p!$ એકમનો અંક 0 છે. .... (1)

$\displaystyle\therefore \sum_{1<p<100} p! = 2! + 3! + \sum_{4<p<100} p! = 8 + \sum_{4<p<100} p!$

$\displaystyle\therefore \sum_{1<p<100} p!$ નો એકમનો અંક 8 છે.........(2)

$\displaystyle\sum_{n=1}^{50} (2n)! = 2! + 4! + \sum_{n=3}^{50} (2n)! = 26 + \sum_{n=3}^{50} (2n)!$

$\displaystyle\therefore \sum_{n=1}^{50} (2n)!$ ના એકમનો અંક 6 છે. [$\because$ (1) પરથી] .... (3)

(2) અને (3) પરથી માગેલ એકમનો અંક = 8 - 6 = 2