PAPER - 3 Solution

(1)

ઉકેલ: $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = \frac{\sin x(3 - 4\sin^2 x)}{\sin x}$

હવે , $3 - 4\sin^2 x = y \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3-y}{4}$

પરંતુ $0 < \sin^2 x \le 1, \quad \because \sin x = 0,\ x = n\pi$

$0 < \frac{3-y}{4} \le 1 \Rightarrow 0 < 3 - y \le 4$

$-3 < -y \le 1 \Rightarrow -1 \le y < 3 \Rightarrow [-1, 3)$

(2) જો નાભિઓ વચ્ચેનું અંતર અતિવલયની $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ની નિયામિકાઓ વચ્ચેનું અંતર 3 : 2 ના ગુણોત્તરમાં હોય, તો a : b = ……

ઉકેલ :નાભિઓ વચ્ચેનુંઅંતર = 2ae અને

નિયામિકાઓ વચ્ચેનુંઅંતર= 2a / e

$2ae : \frac{2a}{e} =$ વચ્ચેનો ગુણોત્તર $3 : 2 \Rightarrow e^2 = 3/2$

આપણી પાસે $= b = a\sqrt{e^2 - 1}$

$\frac{b^2}{a^2} = e^2 - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow a : b = \sqrt{2} : 1$

(3) જો a, b અને c એ સમાંતર શ્રેણીનાં અનુક્રમે પ્રથમ, દ્વિતીય અને અંતિમ પદ હોય, તો આ પદની કુલ સંખ્યા…… છે.

ઉકેલ : પ્રથમ પદ = a, દ્વિતીય પદ = b, અંતિમ પદ = c

$\therefore$ d = b - a, l = અંતિમ પદ, n = પદની સંખ્યા $S_n = \frac{n}{2}(a + l) = \frac{n}{2}(a + c)$ ….(1)

વળી, $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d] = \frac{n}{2}[2a + (n-1)(b-a)]$......(2)

હવે, (1) અને (2) પરથી

$\frac{n}{2}(a + c) = \frac{n}{2}[2a + (n-1)(b-a)]$

$\therefore a + c = 2a + (n-1)(b-a) \ \therefore n - 1 = \frac{c-a}{b-a}$

$\therefore n = \frac{c-a}{b-a} + 1 = \frac{b + c - 2a}{b-a}$ મળે.

(4)

સમીકરણ $\frac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y + i}{3-i} = i$ નુંસમાધાન કરતાં x અને y નાંમૂલ્યો …. છે.

ઉકેલ: $\frac{(1+i)x - 2i}{3+i} + \frac{(2-3i)y + i}{3-i} = i$

$\therefore$ (1 + i) (3 - i)x + (2 - 3i)(3 + i)y - 2i(3 - i) + i(3 + i) = i(9 - i^2)

$\therefore$ (4 + 2i)x + (9 - 7i)y - 3 - 3i = 10i

હવે, વાસ્તવિક ભાગ અને કાલ્પનિક ભાગ સમીકરણ સરખાવતાં

4x + 9y = 3 …. (1) અને 2x - 7y = 13 …. (2)

આ સમીકરણોનું સમાધાન વડે થાય છે. x = 3, y = -1 વડે થાય છે.

$\therefore$ x = 3, y = -1 છે.

(7) $\int_0^{\sqrt{2}} [x^2]\, dx =$ .... (જ્યાં[.] મહત્તમ પૂર્ણાંકીયવિધેયદર્શાવે છે.)

ઉકેલ : $I = \int_0^{\sqrt{2}} [x^2]\, dx = \int_0^{1} [x^2]\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} [x^2]\, dx$

$= \int_0^1 0\, dx + \int_1^{\sqrt{2}} dx = [x]_1^{\sqrt{2}} = \sqrt{2} - 1$

(10) 8 સિક્કા વારાફરથી ઉછાળવામાં આવે, તો ઓછામાં ઓછા 6 હેડ (છાપ) મળવાની સંભાવના કેટલી થાય

ઉકેલમાંગેલસંભાવના $^8C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 + {}^8C_7\left(\frac{1}{2}\right)^7 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) + {}^8C_8\left(\frac{1}{2}\right)^8 = \frac{37}{256}$

(12) જો A={(x, y) / |x - 3| < 1, |y - 3| < 1, x, y $\in$ R} અને B={(x,y)/ $4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 \le 0$, x, y$\in$ R} નીચેના પૈકી કયું સત્ય છે ?

ઉકેલ : $4x^2 + 9y^2 - 32x - 54y + 109 \le 0 \ \therefore \ 4(x^2 - 8x) + 9(y^2 - 6y) + 109 \le 0$

ધારો કે (x, y) $\in$ A

$\therefore |x - 3| < 1 \Rightarrow -1 < x - 3 < 1 \Rightarrow -2 < x - 4 < 0$

$\Rightarrow 0 < (x-4)^2 < 4 \Rightarrow 0 < \left(\frac{x-4}{3}\right)^2 < \frac{4}{9}$.....(2)

વળી |y - 3| < 1 $\Rightarrow$ -1 < y - 3 < 1

$\Rightarrow 0 \le (y-3)^2 < 1 \Rightarrow 0 \le \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 < \frac{1}{4}$......(3)

$\therefore \left(\frac{x-4}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 < \frac{4}{9} + \frac{1}{4} = \frac{25}{36} \ \therefore \left(\frac{x-4}{3}\right)^2 + \left(\frac{y-3}{2}\right)^2 < 1 \ \therefore (x, y) \in B \ \therefore A \subset B$

(13) સંકર સંખ્યાઓ $1 + 4i, 3 + i, 1 - i$ અને $2 - 3i$ ના માનાંક અનુક્રમે m_1, m_2, m_3 અને m_4 હોય તો ..... .

અહીં, $m_3 < m_2 < m_4 < m_1$ $\therefore$ વિકલ્પ (C) શક્ય છે.

(14) જો $P(A \cup B) = \frac{2}{3}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{6}$ અને $P(A) = \frac{1}{3}$ હોય તો...

ઉકેલ : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(AB)$

$$\Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{3} + P(B) - \frac{1}{6} \quad \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{1}{6} + P(B) \quad \Rightarrow P(B) = \frac{1}{2}$$

હવે, $P(AB) = P(A)\,P(B)$ $\therefore$ A અને B નિરપેક્ષ ઘટનાઓ છે.

(15) પરવલય $y^2 = 4ax$ ના નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓ આગળના અભિલંબનું સમીકરણ :

ઉકેલ: પરવલય $y^2 = 4ax$ ના નાભિલંબના અંત્યબિંદુઓના યામ અનુક્રમે $(a, 2a)$ અને $(a, -2a)$ છે.

$y^2 = 4ax$ ના $(a, 2a)$ આગળના અભિલંબનું સમીકણ :

$$y - 2a = -\frac{2a}{2a}(x - a) \left[\text{Using } y - y_1 = -\frac{y_1}{2a}(x - x_1)\right]$$

અથવા $x + y - 3a = 0$ ....(i)

તે જ રીતે $(a, -2a)$ આગળ અભિલંબનું સમીકરણ : $x - y - 3a = 0$ ....(ii)

(i) અને (ii) નું સંયુક્ત સમીકરણ $x^2 - y^2 - 6ax + 9a^2 = 0$

(16) $(a, 0)$, $(at_1^2, 2at_1)$ અને $(at_2^2, 2at_2)$ બિંદુઓ સમરેખ હોવાની શરત નીચે પૈકી કઈ હોઈ શકે ?

ઉકેલ : જો ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ શૂન્ય હોય, તો બિંદુઓ સમરેખ હોય છે.

આથી, $1/2\ [a(t_1^2 - 1)\, 2at_2 - 2at_1(at_2^2 - a)] = 0$

અથવા $t_2(t_1^2 - 1) - t_1(t_2^2 - 1) = 0$

$\Rightarrow t_2t_1^2 - t_2 - t_1t_2^2 + t_1 = 0 \Rightarrow (t_1 - t_2)(t_1t_2 + 1) = 0,\ t_1 \neq t_2$

$\therefore t_1t_2 + 1 = 0 \Rightarrow t_1t_2 = -1$

નોંધ : બિંદુઓનો ઢાળ $\frac{2at_1 - 0}{(at_1^2 - a)} = \frac{2a\,(t_2 - t_1)}{a(t_2^2 - t_1^2)} \quad (\because t_2 \neq t_1)$

$t_2t_2 = -1$

હોય, તો બિંદુઓ સમરેખ હોય છે.

(17) જો વાસ્તવિક x માટે $f(x) = x^3 + 5x + 1$ હોય તો f શું છે?

ઉકેલ : વાસ્તવિક x માટે, $f(x) = x^3 + 5x + 1$

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \pm\infty$ અને $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = -\infty$

$\therefore$ વિસ્તાર R - $f(x)$ છે. જે વ્યાપ્ત છે.

હવે, $f'(x) = 3x^2 + 5 > 0$

$\therefore f(x)$ એક - એક છે.

$f(x)$ એક - એક વ્યાપ્ત છે.

(19) દરેક ધન પૂર્ણાંક માટે, $\frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{2n^3}{3} - \frac{n}{105}$ બરાબર શું થાય?

ઉકેલ : ધારો કે $P(n) = \frac{n^7}{7} + \frac{n^5}{5} + \frac{2n^3}{3} - \frac{n}{105}$

$P(1) = \frac{1}{7} + \frac{1}{5} + \frac{2}{3} - \frac{1}{105} = 1$ (પૂર્ણાંક)

$P(2) = 2^4\left(\frac{8}{7} + \frac{2}{5} + \frac{1}{3}\right) - \frac{2}{105} = 15$ (પૂર્ણાંક)

આથી P(n) પૂર્ણાંક છે.

(20) $\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}dx$ બરાબર શું થાય?

ઉકેલ : $\int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}dx$

$$= \frac{1}{b^2 - a^2}\int \frac{b^2(x^2 + a^2) - a^2(x^2 + b^2)}{(x^2 + a^2)(x^2 + b^2)}dx$$

$$= \frac{1}{b^2 - a^2}\int\left(\frac{b^2}{x^2 + b^2} - \frac{a^2}{x^2 + a^2}\right)dx$$

$$= \frac{1}{b^2 - a^2}\left(b\tan^{-1}\frac{x}{b} - a\tan^{-1}\frac{x}{a}\right) + C$$

(21) ગણ A અને B એવા ગણ છે કે જેથી કોઈક ગણ X માટે $A \cap X = B \cap X = \phi$ અને $A \cup X = B \cup X$ હોય, તો .

ઉકેલ : $A \cap X = B \cap X = \phi$ $\therefore$ A અને X અલગગણ છે તથા B અને X અલગગણ છે.

વળી, $A \cup X = B \cup X$. તેથી $A = B$ એક માત્ર શક્ય છે.

(22) $\int \frac{dx}{(2x - 7)\sqrt{x^2 - 7x + 12}}$ બરાબર શું થાય ?

ઉકેલ : $\int \frac{1}{(2x - 7)\sqrt{x^2 - 7x + 12}}\ dx$

$$\int \frac{2.\,dx}{(2x - 7)\sqrt{4x^2 - 28x + 48}}$$

$$2\int \frac{dx}{(2x - 7)\sqrt{(2x)^2 - 2\,.\,2x\,.\,7 + (7)^2 - 1}}$$

$$= 2\int \frac{dx}{(2x - 7)\sqrt{(2x - 7)^2 - 1}}$$

$$= \sec^{-1}(2x - 7) + c$$

(23) ઉગમબિંદુમાંથી પરવલય $y^2 = 4a(x - a)$ પર દોરેલા સ્પર્શકો વચ્ચેના ખૂણાનું માપ કેટલું હોય?

ઉકેલ: ઉગમબિંદુમાંથી પસાર થતી કોઈપણ રેખા $y = mx$ છે. જો તે $y^2 = 4a(x - a)$ નો સ્પર્શક હોય, તો તે તેને બે સમાન બિંદુઓમાં છેદે.

$\therefore m^2x^2 - 4ax + 4a^2 = 0$ ના બીજ સમાન હોય

$\therefore 16a^2 - 16a^2m^2 = 0$ અથવા $m^2 = 1$ અથવા $m = 1, -1$

ઢાળોનો ગુણાકાર = -1 જેથી તે કાટકોણ ત્રિકોણ છે.

(24) જો અંકોનું પુનરાવર્તન ન કરવાનું હોય તો 0, 1, 2, 4 અને 5 અંકોનો ઉપયોગ કરી 1000 થી નાની કેટલી સંખ્યા બનાવી શકાય?

ઉકેલ : ${}^5C_1 + {}^4C_1 \times {}^4C_1 + {}^4C_1 \times {}^4C_1 \times {}^3C_1 = 5 + 16 + 48 = 69$

(25) $\tan^{-1}\left(\frac{x}{y}\right) - \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right) = ...$

ઉકેલ: $\tan^{-1}\frac{x}{y} - \tan^{-1}\left(\frac{x-y}{x+y}\right)$

$= \tan^{-1}\frac{x}{y} - \tan^{-1}\left(\frac{1-y/x}{1+y/x}\right)$

$= \tan^{-1}\frac{x}{y} - \left(\tan^{-1}1 - \tan^{-1}\frac{y}{x}\right)$

$= \tan^{-1}\frac{x}{y} + \tan^{-1}\frac{y}{x} - \frac{\pi}{4}$

$= \tan^{-1}\frac{x}{y} + \cot^{-1}\frac{x}{y} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}.$

(27) જો સદિશો $\vec{a} = (2, \log_3 x, a)$ અને $\vec{b} = (-3, a \log 3, \log 3x)$ લઘુકોણે ઢફેલા હોય, તો......

ઉકેલ : જ્યારે સદિશો $\vec{a} = 2\hat{i} + \log_3 x\hat{j} + a\hat{k}$ અને $\vec{b} = -3\hat{i} + a\log_3 x\hat{j} + \log_3 a\hat{k}$ લઘુકોણે ઢળેલા હોય.

$\therefore$ બધા $\vec{a}\cdot\vec{b} > 0$ માટે

$\Rightarrow -6 + a(\log_3 x)^2 + a\log_3 x > 0$ બધાં $x > 0$ માટે

$\Rightarrow -6 + ay^2 + ay > 0$, જ્યાં $y = \log_3 x$.

બધા $ay^2 + ay - 6 > 0$ માટે $y \in R$

$\Rightarrow a > 0$ અને $a^2 + 24a < 0 \Rightarrow a > 0$ અને $a \in (-24, 0)$

પરંતુ આ શકય નથી. જેથી a ના કોઇપણ વાસ્તવિક મૂલ્ય માટે સદિશો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ લઘુકોણે ઢાફેલા નહોય.

(28) જે ઉપવલયનું એક શિરોબિંદુ (0, 7) હોય અને નિયામિકા y = 12 હોય, તે ઉપવલયનું સમીકરણ....

ઉકેલ : શિરોબિંદુ$(0, 7)$ નિયામિકા $y = 12, \therefore b = 7$

પણ $\frac{b}{e} = 12 \Rightarrow e = \frac{7}{12}, a = 7\sqrt{\frac{95}{144}}$

આથી ઉપવલયનુંસમીકરણ $144x^2 + 95^2 y = 4655$ હોય.

ઉકેલ: $(1+ax)[(1+b_1x)(1+c_2x) - (1+b_2x)(1+c_1x)] +$

$(1+bx)[(1+c_1x)(1+a_2x) - (1+a_1x)(1+c_2x)]$

$+ (1+cx)[(1+a_1x)(1+b_2x) - (1+b_1x)(1+a_2x)]$

$= A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3$ માં x નો સહગુણક 0 છે.

(30) સમીકરણ $(p - q)x^2 + (q - r)x + (r - p) = 0$ ના બીજ.......છે.

ઉકેલ : $(p - q)x^2 + (q - r)x + (r - p) = 0$ સમીકરણ આપેલ છે.

$$x = \frac{(r-q) \pm \sqrt{(q-r)^2 - 4(r-p)(p-q)}}{2(p-q)}$$

$$\Rightarrow x = \frac{(r-q) \pm (q+r-2p)}{2(p-q)} \Rightarrow x = \frac{r-p}{p-q}, 1$$