paper :2

(4) ΔABC માટે $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = ...$

ઉકેલ : $\frac{\sin(A-B)}{\sin(A+B)} = \frac{\sin A\cos B - \sin B\cos A}{\sin C} = \frac{a}{c}\cos B - \frac{b}{c}\cos A$

પરંતુ, $\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}, \cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$

$\Rightarrow \frac{a}{c}\cos B - \frac{b}{c}\cos A = \frac{1}{2c^2}\ (a^2+c^2-b^2-b^2-c^2+a^2) = \frac{a^2-b^2}{c^2}.$

(5) જો A અને B બે ગણો હોય, તો $A \cap (A \cup B)'$ બરાબર શું થાય ?

ઉકેલ : $A \cap (A \cup B)' = A \cap (A' \cap B')$

(કારણ કે $(A \cup B)' = A' \cap B'$)

$= (A \cap A') \cap B'$ (જૂનના નિયમ પ્રમાણે)

$= \phi \cap B'$ (કારણ કે $A \cap A' = \phi$)

$= \phi$

(6) $3\sin x - 4\sin^3 x$ એ જે મહત્તમ લંબાઇના અંતરાલમાં વધતુ વિધેય છે તે અંતરાલની લંબાઇ...... છે.

ઉકેલ : અહીં $f(x) = 3\sin x - 4\sin^3 x \quad \therefore f(x) = \sin 3x$

હવે $\sin 3x$ એ $3x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ માટે વધતુ વિધેય છે.

વળી $-\frac{\pi}{2} < 3x < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{6} < x < \frac{\pi}{6}$

$\therefore 3\sin x - 4\sin^3 x$ એ $\left(-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}\right)$ માંવધતુ વિધેય છે.

જેની લંબાઇ $\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ છે.

(9) સંકર સંખ્યાઓ z_1, z_2, z_3, એ સમાંત, બાજુ ચતુષ્કોણ ABCD ના શિરોબિંદુઓ A, B, C છે તો ચોથું શિરોબિંદુ D કયું હશે ?

ઉકેલ : ધારો કે ચોથું શિરોબિંદુ D અને z_4 છે.

બિંદુઓ z_1, z_2, z_3, z_4 સમાંતરબાજુ ચતુષ્કોણના શિરોબિંદુઓ હોવાથી, બે વિકર્ણોના મધ્યબિંદુઓને અનુરૂપ સંકર સંખ્યાઓ સાથે સરખાવતાં, આપણને

$\frac{z_1+z_3}{2} = \frac{z_2+z_4}{2}$ અથવા $z_1 + z_3 = z_2 + z_4$

$\therefore z_4 = z_1 + z_3 - z_2$ મળે.

(10) જો વક્ર $y = a\sqrt{x} + bx$ એ બિંદુ (1, 2) માંથી પસાર થતો હોય તથા આ વક્ર x-અક્ષ અને રેખા $x = 4$ વડે આંતરેલ ભાગનું ક્ષેત્રફળ 8 ચોરસ એકમ હોય તો,....

ઉકેલ : વક્ર $y = a\sqrt{x} + bx$. આ વક્ર (1, 2), માંથી પસાર થાય છે.

$\therefore 2 = a + b$ ..... (i)

આ વક્ર રેખા તેમજ x - અક્ષ વડે આંતરેલ ભાગનું ક્ષેત્રફળ 8 છે,

તો, $\int_0^4 (a\sqrt{x} + bx)\,dx = 8$

$\Rightarrow \frac{2a}{3}[x^{3/2}]_0^4 + \frac{b}{2}[x^2]_0^4 = 8,\ \frac{2a}{3}.8 + 8b = 8 \Rightarrow 2a + 3b = 3$ .... (ii)

(i) અને (ii), પરથી $a = 3, b = -1$.

(11) જો સમીકરણ $x^2 + px + q = 0$ ના બીજ α, β હોય, તો કયા સમીકરણના બીજ $q/\alpha, q/\beta$ હશે ?

ઉકેલ: $x^2 + px + q = 0$; α, β; $\frac{q}{\alpha} = x$ લો.

$\alpha = \frac{q}{x}$ તે જ રીતે $\beta = \frac{q}{x}$

પરંતુ આપેલ મુજબ બીજ છે તેથી સમીકરણને સંતાપશે.

$\frac{q^2}{x^2} + \frac{pq}{x} + q = 0 \Rightarrow x^2 + px + q = 0$

(12) $\sin^{-1}\left(\log_3\left(\frac{x}{3}\right)\right)$ નો પ્રદેશ શું થાય?

ઉકેલ : $y = \sin^{-1}[\log_3(x/3)] \Rightarrow 1 \le \log_3(x/3) \le 1$

$\Rightarrow \frac{1}{3} \le \frac{x}{3} \le 3 \Rightarrow 1 \le x \le 9 \Rightarrow x \in [1, 9]$

(15) વિધેય $f(x) = \sin x - \cos x$ એ ક્યારે એકસૂત્રી વધતું થાય ?

ઉકેલ : $f'(x) = \cos x + \sin x$

$$= \sqrt{2}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\cos x + \frac{1}{\sqrt{2}}\sin x\right) = \sqrt{2}\sin(x + \pi/4)$$

હવે, જ્યારે $f'(x) > 0$ થાય, ત્યારે $f(x)$ એકસૂત્રી વધતું વિધેય થાય.

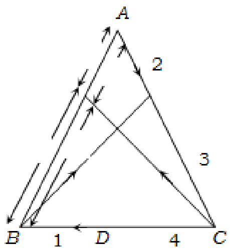
$\Rightarrow \sqrt{2}\sin(\pi/4 + x) > 0$

$\Rightarrow 0 < \pi/4 + x < \pi$ ($\because$ જ્યારે $0 < \theta < \pi$ હોય, ત્યારે $\sin\theta$ ધન થાય)

$\therefore x \in (-\pi/4, 3\pi/4)$

(16) જો બિંદુઓ D, E, F એ ΔABC માં BC, CA, AB નું 1 : 4, 3 : 2, 3 : 7 ગુણોત્તરમાં વિભાજન કરે અને બિંદુ K એ AB નું ગુણોત્તર વિભાજન કરે તો $(\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}) : \overrightarrow{CK} = ...$

ઉકેલ : ધારો કે $\overrightarrow{AB} = a, \overrightarrow{AC} = b$



તેથી, $\overrightarrow{AD} = \frac{4a+b}{5}, \overrightarrow{AE} = \frac{2b}{5}, \overrightarrow{AF} = \frac{3a}{10}$, અને $\overrightarrow{AK} = \frac{a}{4}$

$$\frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BE} + \overrightarrow{CF}}{\overrightarrow{CK}} = \frac{\frac{b+4a}{5} + \frac{2b-5a}{5} + \frac{3a-10b}{10}}{\frac{a-4b}{4}}$$

$$= \frac{6b - 2a + 3a - 10b}{10(a-4b)} \times 4 = \frac{2}{5}$$

(17) બે સંખ્યાઓ b અને c વચ્ચેનો સમાંતર મધ્યક a અને તેમની વચ્ચેના બે સમગુણોત્તર મધ્યકો g_1 અને g_2 છે. જો $g_1^3 + g_2^3 = kabc$, હોય, તો k = ...

ઉકેલ: b અને c વચ્ચેનો સમાંતર મધ્યક a છે. $\therefore \frac{b+c}{2} = a \Rightarrow b + c = 2a$

b અને c વચ્ચેના બે સમગુણોત્તર મધ્યકો g_1 અને g_2 છે.

જો સામાન્ય ગુણોત્તર r હોય, તો $c = br^3 \Rightarrow r = \left(\frac{c}{b}\right)^{1/3}$

$g_1 = br = b\left(\frac{c}{b}\right)^{1/3}$ અને $g_2 = br^2 = b\left(\frac{c}{b}\right)^{2/3}$

$$\therefore g_1^3 + g_2^3 = b^3\left[\left(\frac{c}{b}\right) + \left(\frac{c}{b}\right)^2\right] = b^3 \times \frac{c}{b}\left(1 + \frac{c}{b}\right)$$

$$= b^2c \times \frac{b+c}{b} = bc(2a) \quad [\because b + c = 2a] = 2abc$$

(18) જો બે સદિશો $i + k$ અને $i - j + ak$ વચ્ચેનો ખૂણો $\pi/3$ હોય, તો a નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે $\vec{a} = i + j$, $\vec{b} = i - j + ak$

$$\therefore \cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|.|\vec{b}|}$$

$$\cos\frac{\pi}{3} = \frac{(i+k).(i-j+ak)}{\sqrt{1^2+1^2}\sqrt{1^2+1^2+a^2}} \Rightarrow \frac{1}{2}\ \frac{(1)(1)+(0)(-1)+(1)(a)}{\sqrt{2}+\sqrt{2+a^2}}$$

$$\frac{1}{2} = \frac{1+a}{\sqrt{2}\sqrt{2+a^2}} \Rightarrow \frac{1}{4}\ \frac{(1+a^2)}{2(2+a^2)}$$

$4 + 2a^2 = 4(a^2 + 1 + 2a) \Rightarrow 4a^2 - 2a^2 + 8 + 4 - 4 = 0$

$2a^2 + 8a = 0 \Rightarrow 2a(a + 4) = 0$

$a = 0$ અથવા $a = -4$

જેથી $a = 0$ કારણ કે $a \neq -4$ $a = -4$ માટે θ નું ઋણ મુલ્ય મળે.

(19) એક પાસો 5 વખત ઉછાળવામાં આવે છે. જો એકી સંખ્યા આવે તો તે સફળતા ગણાય છે. તો સફળતા વિતરણમાં ભિન્નતા કેટલી?

ઉકેલ : odd મળવાની સંભાવના p = 3/6 = 1/2

બીજુ મળવાની સંભાવના q = 3/6 = 1/2

ભિન્નતા $= npq = 5.\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \frac{5}{4}.$

(20) ધારો કે ચાર જુદી જુદી ધન સંખ્યાઓ a_1, a_2, a_3, a_4 સમગુણોત્તર શ્રેણીમાં છે. $b_1 = a_1$, $b_2 = b_1 + a_2$, $b_3 = b_2 + a_3$ અને $b_4 = b_3 + a_4$ લો.

વિધાન - I : સંખ્યાઓ b_1, b_2, b_3, b_4 સમાંતર શ્રેણીમાં નથી કે સમગુણોત્તરમાં પણ નથી.

વિધાન - II : સંખ્યાઓ b_1, b_2, b_3, b_4 સ્વરીત શ્રેણીમાં છે.

(21) 53 રવિવાર અથવા 53 સોમવાર ધરાવતા લિપ વર્ષનો યાદચ્છિક રીતે પસંદ કરવામાં આવે તો કેટલી સંભાવના મળે ?

ઉકેલ : લિપ વર્ષ 366 દિવસોનું બનેલું છે. જેમાં 52 અઠવાડિયા અને 2 દિવસો છે. આ 2 વધારાના દિવસો માટે 7 શક્યતાઓ છે જે નીચે મુજબ છે.

(i) રવિવાર, સોમવાર, (ii) સોમવાર, મંગળવાર (iii) મંગળવાર, બુધવાર (iv) બુધવાર, ગુરુવાર (v) ગુરુવાર, શુક્રવાર

(vi) શુક્રવાર, શનિવાર અને (vii) શનિવાર અને રવિવાર બે ઘટનાઓ નક્કી કરીએ.

A : લિપ વર્ષ 53 રવિવાર ધરાવે છે. B : લિપ વર્ષ 53 સોમવાર ધરાવે છે.

આમ આપણી પાસે $P(A)=\frac{2}{7},\ P(B)=\frac{2}{7},\ P(A\cap B)=\frac{1}{7}$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $= P(A\cup B)$

$= P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2}{7}+\frac{2}{7}-\frac{1}{7}=\frac{3}{7}$

(24) સદિશનો યામાક્ષો પરનો પ્રક્ષેપ 6, -3, 2. દિક્કોસાઇન અને લંબાઈ શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે આપેલા સદિશ $\vec{r}$ ના દિક્કોસાઈનો l, m, n હોય, યામાક્ષો પર તેના પ્રક્ષેપ :

$l|\vec{r}|,\ m|\vec{r}|,\ n|\vec{r}|$

$\therefore l|\vec{r}|=6,\ m|\vec{r}|=-3,\ n|\vec{r}|=2$ ....(i)

$\Rightarrow \left(l|\vec{r}|\right)^2+\left(m|\vec{r}|\right)^2+\left(n|\vec{r}|\right)^2=6^2+(-3)^2+(2)^2$

$\Rightarrow |\vec{r}|^2\left(l^2+m^2+n^2\right)=36+9+4$

$\Rightarrow |\vec{r}|^2=49\ \left[\because l^2+m^2+n^2=1\right]$

$\Rightarrow |\vec{r}|=7$ (i)માં $|\vec{r}|=7$ મૂકતાં, $l=\frac{6}{7},\ m=-\frac{3}{7},\ n=\frac{2}{7}$

(25) આર્ગન્ડ આકૃતિમાં જો z એ સંકર સંખ્યા હોય તો $|z-2|+|z+2|=8$ નું સમીકરણ શું દર્શાવે?

ઉકેલ: $|z-2|+|z+2|=8$

$\Rightarrow \sqrt{(x-2)^2+y^2}+\sqrt{(x+2)^2+y^2}=8$

$\Rightarrow x^2+y^2+4-4x=64+x^2+y^2+4+4x-16\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Rightarrow -8x-64=-16\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Rightarrow (x+8)=2\sqrt{(x+2)^2+y^2}$

$\Rightarrow x^2+64+16x=4[x^2+y^2+4+4x]$

$\Rightarrow 3x^2+4y^2-48=0\ \Rightarrow \frac{x^2}{16}+\frac{y^2}{12}=1$, જે ઉપવલય છે.

(26) $\lim_{x\to\infty}\left\{x-\sqrt{(x^2+x)}\right\}$ નું મૂલ્ય કેટલું થાય?

ઉકેલ : આપણી પાસે $\lim_{x\to\infty}\left\{x-\sqrt{x^2+x}\right\}$ છે.

સંમેયીકરણ કરતાં

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x-\sqrt{x^2+x}\times\frac{x+\sqrt{x^2+x}}{x+\sqrt{x^2+x}}$

$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{x^2-x^2-x}{x\left[1+\sqrt{1+\frac{1}{x}}\right]}\Rightarrow -\frac{1}{2}$

(27) 3 પુરૂષો, 2 સ્ત્રી 4 બાળકો પૈકી યાદચ્છિક રીતે ચાર વ્યક્તિને પસંદ કરતા ચોક્કસ 2 બાળકો પસંદ થવાની સંભાવના કેટલી થાય છે.

ઉકેલ : $3+2+4=9$ વ્યક્તિઓ પૈકી 4 વ્યક્તિઓને પસંદ કરવાની રીતોની સંખ્યા $={}^9C_4=126$ થાય.

પસંદ કરેલા 4 પૈકી ચોક્કસ 2 બાળકો હોવા રીતોની સંખ્યા $={}^4C_2\times{}^5C_2=60$

$\therefore$ માંગેલ સંભાવના $=\frac{60}{126}=\frac{10}{21}$

(29) સમીકરણ $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}$ અને $\tan\theta=-1$ ને સ્વીકારે તેવા θ નું અતિવ્યાપક મૂલ્ય = ...

ઉકેલ: $\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}=\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)$ અને $\theta=2n\pi\pm\frac{\pi}{4};\ n\in I,\ n=1,\ \theta=\frac{9\pi}{4},\frac{7\pi}{4}$ મૂકતાં

$\tan\theta=-1=\tan\left(\frac{-\pi}{4}\right)\quad \theta=n\pi-\frac{\pi}{4};\ n\in I$

$n=1,\ \theta=\frac{3\pi}{4}$ મૂકતાં $\quad n=2,\ \theta=\frac{7\pi}{4}$ મૂકતાં

(30) પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાઓનું પ્રમાણિત વિચલન = ...

ઉકેલ : $\because S.D.=\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma x_i^2-\left(\frac{1}{n}\Sigma x_i\right)^2}$

તેથી પ્રથમ n પ્રાકૃતિક સંખ્યાના S.D. $=\sqrt{\frac{1}{n}\Sigma n^2-\left(\frac{1}{n}\Sigma n\right)^2}$

$=\sqrt{\frac{1}{n}.\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}-\left\{\frac{1}{n}.\frac{n(n+1)}{2}\right\}^2}$

$=\sqrt{\frac{(n+1)(2n+1)}{6}-\frac{(n+1)^2}{4}}=\sqrt{\frac{(n+1)(n-1)}{12}}=\sqrt{\frac{n^2-1}{12}}$