Paper - 15 Solutiuon

(1) જો A અને B સમાન કક્ષા 3×3 નાં બે શ્રેણિકો હોય, જ્યાં

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 8 \end{bmatrix} \text{ અને } B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 5 \\ 2 & 3 & 8 \\ 7 & 2 & 9 \end{bmatrix}$$

માહિતીના આધારે |Adj (Adj A)| નું મૂલ્ય કેટલું થાય?

ઉકેલ : $|\text{adj}(\text{adj } A)| = |A|^{(n-1)^2}$

(2) (1, 4) થી પરવલય $y^2 = 12x$ પર દોરેલા સ્પર્શકોની જોડનું સમીકરણ શું થાય ?

ઉકેલ : $SS_1 = T_2$ સૂત્ર પરથી $(y^2 - 12x).4 = (4y - 6x - 6)^2$

$\Rightarrow 3x^2 + y^2 + 10x - 4xy - 4y + 3 = 0$

(3) એક રેખા યામાક્ષો સાથે α, β, γ કોણ બનાવે છે. જો $\alpha + \beta = 90°$, તો $\gamma =$ ……

ઉકેલ: અહીં $\cos^2 \alpha + \cos^2 (90° - \alpha) + \cos^2 \gamma = 1$

$\Rightarrow \cos\alpha + \sin^2 \alpha + \cos^2 \gamma = 1 \Rightarrow \cos^2 \gamma + 1 = 1 \Rightarrow \gamma = 90°$

(4) $\int_{\pi}^{10\pi} |\sin x| dx =$ …………

ઉકેલ : $\int_0^{\pi} |\sin x|\, dx + \int_{\pi}^{10\pi} |\sin x|\, dx - \int_0^{\pi} |\sin x|\, dx$

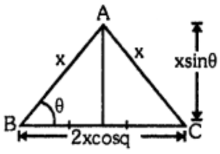
$= \int_0^{10\pi} |\sin x|\, dx - \int_0^{\pi} |\sin x|\, dx$

$= 10\int_0^{\pi} |\sin x|\, dx - \int_0^{\pi} |\sin x|\, dx = 9\int_0^{\pi} |\sin x|\, dx$

$= 9 \times 2 = 18$

(6) એક ત્રિકોણીય બગીચો કે જેની બે બાજુએ તારની વાડ છે અને ત્રીજી બાજુએ સીધો નદી કિનારો છે. જે બે બાજુઓ તારવાળી છે. તેમની સરખી લંબાઈ x છે. તો બગીચા વડે ઘેરાતું મહત્તમ ક્ષેત્રફળ કેટલું છે ?

ઉકેલ :



ત્રિકોણીય બગીચો

$\Delta = \frac{1}{2}(2x\cos\theta)(x\sin\theta)$

$= \frac{1}{2}x^2 \sin 2\theta$

$\Delta_{max} = \frac{x^2}{2}$

(7) વિધાન $p \to (q \to p)$ કોના સાથે સમતુલ્ય છે ?

ઉકેલ : કારણ કે $p \to (q \to p)$ ખોટું છે.

$\Rightarrow$ p સાચો છે. અને $(q \to p)$ ખોટું છે. જે શક્ય નથી.

તેથી $p \to (q \to p)$ હંમેશા સાચું હોય. એટલે કે તે માત્ર પુનરાવૃતિ હોય.

ફરીથી $p \to (p \vee q)$ ખોટું છે.

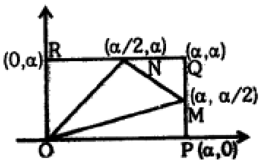
p સાચો છે. અને $(p \vee q)$ ખોટું છે. જે શક્ય નથી.

તેથી $p \to (p \vee q)$ હંમેશા સાચું હોય. એટલે કે તે માત્ર પુનરાવૃતિ છે.

જેથી $p \to (q \to p) \equiv p \to (p \vee q)$

(8) OPQR ચોરસ છે અને M અને N અનુક્રમે બાજુઓ PQ અને QR ના મધ્યબિંદુ હોય, તો ચોરસ અને ત્રિકોણ OMN ના ક્ષેત્રફળનો ગુણોત્તર કેટલું થાય ?

ઉકેલ:



A_1 = ચોરસનું ક્ષેત્રફળ $= \alpha^2$, A_2 = ત્રિકોણનું OMN નું ક્ષેત્રફળ

$$= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \alpha & \frac{\alpha}{2} & 1 \\ \frac{\alpha}{2} & \alpha & 1 \end{vmatrix} \text{ So } \frac{A_1}{A_2} = 8:3$$

(9) $y = e^{cx}$ અને સમીકરણ $y = e^{mx}$ માંથી અચળ ને દુર કરતા ……વિકલ સમીકરણ મળે.

ઉકેલ : $y = e^{mx}$

$\Rightarrow \log y = mx \Rightarrow m = \frac{\log y}{x}$

હવે, $y = e^{mx}$

$\Rightarrow \frac{dy}{dx} = me^{mx} = \frac{\log y}{x}.y = \left(\frac{y}{x}\right)\log y$

(11) બે સાયકલ સવાર પરસ્પર વચ્ચે 120° નો ખૂણો બનાવતા રસ્તાનાં જંકશનથી ભિન્ન રસ્તા પર 4 કિમી/ક અને 3 કિમી /ક ના વેગથી જાય છે. 1 કલાક પછી બંન્ને સાયકલ સવારનો એકબીજાનો દૂર જવાનો દર …..કિમી/ક છે.

ઉકેલ : ધારો કે t સમયે પ્રથમ સાયકલ સવાર A(t) સ્થળે અને બીજો સાયકલ સવાર B(t) સ્થળે છે અને બંને વચ્ચેનું અંતર x છે.

$\therefore$ OA = 4t અને OB = 3t

હવે, $\cos 120° = \frac{OA^2 + OB^2 - AB^2}{20A \times OB}$

$\therefore -\frac{1}{2} = \frac{16t^2 + 9t^2 - x^2}{2(4t)(3t)} \quad \therefore -12t^2 = 25t^2 - x^2$

$\therefore x^2 = 37t^2 \quad \therefore x^2 = 37t^2 \quad \therefore x = \sqrt{37}t \quad \therefore \frac{dx}{dt} = \sqrt{37}$

(12) (a, b + c), (b, c + a) અને (c, a + b) બિંદુઓ વડે બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ કેટલું થશે ?

ઉકેલ : ક્ષેત્રફળ $= \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & b+c & 1 \\ b & c+a & 1 \\ c & a+b & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}\begin{vmatrix} a & a+b+c & 1 \\ b & a+b+c & 1 \\ c & a+b+c & 1 \end{vmatrix}$

($C_2 \to C_1 + C_2$ લાગુ પાડતાં)

$= \frac{(a+b+c)}{2}\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ b & 1 & 1 \\ c & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$

(13) સમાંતર શ્રેણીનું p મું પદ q અને q મું પદ p હોય, તો તેનું r મું પદ...... થશે.

ઉકેલ : અહીં, $t_p = q$ અને $t_q = p$

$\therefore$ a + (p - 1)d = q .....(1) અને a + (q - 1)d = p .....(2) ઉકેલતા

(p - q)d = -(p - q) $\therefore$ d = -1

હવે, (1) પરથી a + (p - 1)(-1) = q $\therefore$ a = p + q - 1

હવે, r મું પદ $t_r = a + (r - 1)d = (p + q - 1) + (r - 1)(-1)$

$\therefore t_r = p + q - r$

(15) ‘MISSISSIPPI’ શબ્દના અક્ષરો વડે એક અથવા વધારે અક્ષરોવાળા કુલ કેટલા ભિન્ન સંચયો બનાવી શકાય ?

ઉકેલ : અહીં આપણી પાસે 1 M , 4 I, 4 S અને 2 P છે.

આથી, એક અથવા વધારે પત્રોની પસંદગીની કુલ સંખ્યા

= (1 + 1) (4 + 1) (4 + 1) (2 + 1) - 1 = 149

(16) ગણિતનો એક દાખલો ત્રણ વિદ્યાર્થી A, B અને C ને આપવામાં આવે છે. તેને ઉકેલવાની સંભાવના અનુક્રમે 1/2, 1/3, 1/4 હોય, તો દાખલો ઉકેલવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ :A, B અને C વડે દાખલો ઉકેલવાની ઘટનાઓ નિરપેક્ષ છે.

$= 1 - \left[\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)\left(1-\frac{1}{4}\right)\right] = 1 - \frac{1}{2}.\frac{2}{3}.\frac{3}{4} = \frac{3}{4}$

(18) જો x અને y ના બધા મૂલ્યો માટે $f(x + y) = f(x) . f(y)$ અને $f(5) = 2, f'(0) = 3$ હોય, તો $f'(5) = ...$

ઉકેલ: $f(x+y) = f(x) . f(y) \quad \forall x, y$

$\therefore f(5+0) = f(5) . f(0) \quad \{\because f(5) = 2\} \quad \therefore f(0) = 1$

હવે , $f'(5) = \lim_{h\to 0} \frac{f(5+h) - f(5)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(5)f(h) - f(5)}{h}$

$= f(5) \lim_{h\to 0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = f(5)\ f'(0) = 2 \times 3 \Rightarrow 6$

(19) $\sin^{-1}\left[x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2}\right] = ...$

ઉકેલ :ધારો કે $x = \sin\theta$ અને $\sqrt{x} = \sin\phi$ તેથી, $\sin^{-1}(x\sqrt{1-x} - \sqrt{x}\sqrt{1-x^2})$

$= \sin^{-1}(\sin\theta\sqrt{1-\sin^2\phi} - \sin\phi\sqrt{1-\sin^2\theta})$

$= \sin^{-1}(\sin\theta\cos\phi - \sin\phi\cos\theta) = \sin^{-1}\sin(\theta - \phi)$

$= \theta - \phi = \sin^{-1}(x) - \sin^{-1}(\sqrt{x})$

(20) જો [a b c] = 0 તો ......

(21) □n∈N માટે,(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6) એ ક્યા મોટામાં મોટા ધન પૂર્ણાંક વડે વિભાજ્ય છે ?

ઉકેલ : □n∈N માટે, (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6) એ ક્યા મોટામાં મોટા ધન પૂર્ણાંક વડે વિભાજ્ય છે ?

P(n): (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6), n∈N

P(1) = 3.4.5.6.7 = 120.21; P(2) = 4.56.7.8 = 120.56

P(3) = 5.6.7.8.9 = 120.126; P(4) = 6.78.9.10 = 120.252

P(5) = 7.8.9.10 = 120.42; P(6) = 8.9.10.11.12 = 120.99.13

(22) સમતલો x + 2y + 3z - 4 = 0; 4x + 3y + 2z + 1 = 0 ના છેદમાંથી તથા ઊગમબિંદુમાથી પસાર થતા સમતલનું સમીકરણ શુ થાય?

ઉકેલ : સમતલો x + 2y + 3z - 4 = 0 અને 4x + 3y + 2z + 1 = 0 ના છેદમાંથી પસાર થતા

સમતલનું સમીકરણ x + 2y + 3z - 4 + λ (4x + 3y + 2z + 1) = 0 છે

પણ તે ઊગમબિંદુમાંથી પસાર થતુ હોવાથી λ = 4.

માટે માંગેલ સમીકરણ 17x + 14y + 11z = 0 છે.

(24) $\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + ... + 2^n\binom{n}{n}$ નું મૂલ્ય કોના બરાબર થાય છે?

ઉકેલ : $(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + ... + \binom{n}{n}x^n$ માં x = 2 લેતાં,

$\binom{n}{0} + 2\binom{n}{1} + 2^2\binom{n}{2} + ... + 2^n\binom{n}{n} = (1+2)^n = 3^n$

(25) એક શાળાના 20 શિક્ષકો ગણિત અથવા ભૌતિકવિજ્ઞાન ભણાવે છે તેમાંના 12 ગણિત જયારે 4 બંને વિષય ભણાવે છે. તો કેટલા શિક્ષકો ફક્ત ભૌતિકવિજ્ઞાન વિષય ભણાવે છે?

ઉકેલ : ધારો કે n (P) = ભૌતિકવિજ્ઞાન ભણાવતાં શિક્ષકોની સંખ્યા, n (M) = ગણિત ભણાવતાં શિક્ષકોની સંખ્યા

$n(P \cup M) = n(P) + n(M) - n(P \cap M)$

$\Rightarrow 20 = n(P) + 12 - 4 \Rightarrow n(P) = 12.$

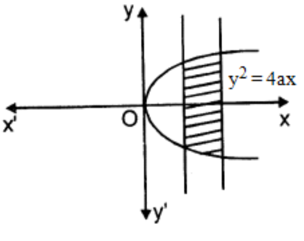
(27) $\frac{2+5i}{4-3i}$ ની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા....... છે.

ઉકેલ : $\frac{2+5i}{4-3i} = \frac{(2+5i)(4+3i)}{(4-3i)(4+3i)} = \frac{8 + 20i + 6i + 15i^2}{16 - 9i^2}$

$= \frac{-7+26i}{25}$ મળે. તેની અનુબદ્ધ સંકર સંખ્યા $\frac{-7-26i}{25}$ છે.

(28) x = a અને x = 9a ના y - યામો વચ્ચે પરવલય $y^2 = 4ax$ દ્વારા ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ:



નીચે દર્શાવ્યા પ્રમાણે આપેલ વક્ર X - અક્ષ પ્રત્યે સંમિત છે.

$\therefore$ માંગેલું ક્ષેત્રફળ $= 2\int_{a}^{9a} \sqrt{4ax}\,dx = \left[4\sqrt{a}\,\frac{x\sqrt{x}}{3/2}\right]_{a}^{9a}$

$= \frac{8\sqrt{a}}{3}\left[27a\sqrt{a} - a\sqrt{a}\right] = \frac{208a^2}{3}$

(29) જો ω એ 1નું ઘનમૂળ હોય તો, $\begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix} = ...$

ઉકેલ: $\Delta = \begin{vmatrix} x+1 & \omega & \omega^2 \\ \omega & x+\omega^2 & 1 \\ \omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix} x+1+\omega+\omega^2 & \omega & \omega^2 \\ x+1+\omega+\omega^2 & x+\omega^2 & 1 \\ x+1+\omega+\omega^2 & 1 & x+\omega \end{vmatrix}$, $(C_1 \to C_1 + C_2 + C_3)$ પરથી

$= x\begin{vmatrix} 1 & \omega & \omega^2 \\ 1 & x+\omega^2 & 1 \\ 1 & 1 & x+\omega \end{vmatrix}$ $(\because 1+\omega+\omega^2 = 0)$

$= x[1\{(x+\omega^2)(x+\omega) - 1\} + \omega\{1-(x+\omega)\} + \omega^2\{1-(x+\omega^2)\}]$

$= x(x^2 + \omega x + \omega^2 x + \omega^3 - 1 + \omega - \omega x - \omega^2 + \omega^2 - \omega^2 x - \omega^4)$

$= x^3, \quad (\because \omega^3 = 1)$