Paper - 14 Solutiuon

(1) જો A અને B એ 3×2 કક્ષાના શ્રેણિક હોય અને C એ 2×3 કક્ષાનો હોય, તો નીચેનમાંથી કયો શ્રેણિક વ્યાખ્યાયિત કરી શકાય નહિ?

ઉકેલ :

$A_{3 \times 2}$: $B_{3 \times 2}$: $C_{2 \times 3}$

$A^T_{2 \times 3}$: $B_{3 + 2}$ તેથી, બંનેનો સરવાળો

$A^T + B$ શક્ય નથી.

(2) જો $y = x^{x^{x^{\cdots\cdots\infty}}}$ તો $\frac{dy}{dx} = \ldots\ldots\ldots$

ઉકેલ : $y = x^y \quad \therefore \log y = y \log x$

$\therefore \frac{1}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx} \log x + y \cdot \frac{1}{x} \quad \therefore \left(\frac{1}{y} - \log x\right)\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$\therefore \frac{(1 - y\log x)}{y} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x} \quad \therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y^2}{x(1 - y\log x)}$

(3) જો વક્ર $y^n = a^{n-1}x$ ના કોઈપણ બિંદુ આગળ અવભિલંબની લંબાઈ અચળ હોય, તો n બરાબર શું થાય ?

ઉકેલ: $y^n = a^{n-1}x$

અવાભિલંબની લંબાઈ $= y_1 \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$

$y^n = a^{n-1}x$

$ny^{n-1}\frac{dy}{dx} = a^{n-1} \times 1$

$\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{a^{n-1}}{n \times y^{n-1}} \quad \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)} = \frac{a^{n-1}}{n \times y_1^{n-1}}$

અવાભિલંબની લંબાઈ $= y_1 \times \left(\frac{dy}{dx}\right)_{(x_1, y_1)}$

$y_1 \times \frac{a^{n-1}}{n \times y_1^{n-1}} = K$

$\frac{1}{n}a^{n-1} \times y_1^{1-n+1} = K$

તેથી, $n = 2$

(4) જો "SACHIN' શબ્દના અક્ષરોને શક્ય તેટલી બધી જ રીતે ગોઠવવામાં આવે અને આ શબ્દો શબ્દકોશ પ્રમાણે હોય, તો 'SACHIN' શબ્દ કેટલામાં ક્રમાંક પર દેખાશે ?

ઉકેલ : A, C, H, I કે થી શરૂ થતો 6 અક્ષરનો પ્રત્યેક શબ્દ 5 ! રીતે મળે.

આવા કુલ શબ્દો $5 \times 5 ! = 5(120) = 600$ છે.

હવે, S થી શરૂ થતો પ્રથમ શબ્દ SACHIN છે.

તેથી સ્પષ્ટ છે કે , SACHIN એ 601 મા ક્રમાંકે છે.

(5) સંખ્યાઓ a અને b નો સમાંતર મધ્યક તેના સમગુણોત્તર મધ્યકથી બમણો હોય, તો a : b =

ઉકેલ : અહીં, $A = 2G \quad \therefore \frac{a+b}{2} = 2\sqrt{ab}; \ a > b \quad \therefore \frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{2}{1}$

$\therefore \frac{a + 2\sqrt{ab} + b}{a - 2\sqrt{ab} + b} = \frac{2+1}{2-1}$ (યોગ - વિયોગ પ્રમાણ)

$\therefore \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2} = \frac{3}{1} \quad \therefore \frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}}{1}$

$\therefore \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} \quad \therefore \frac{a}{b} = \left(\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1}\right)^2$

$\therefore \frac{a}{b} = \frac{4 \pm 2\sqrt{3}}{4 - 2\sqrt{3}} = \frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}} \quad \therefore \ a : b = 2 + \sqrt{3} : 2 - \sqrt{3}$

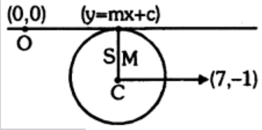
(6) એક બિંદુ એવી રીતે ગતિ કરે છે કે જેથી યામાક્ષોથી તેના અંતરના વર્ગોનો સરવાળો 36 હોય, તો આ આપેલા બિંદુનું ઉગમબિંદુથી અંતર....

ઉકેલ: $x^2 + y^2 + z^2 + z^2 + x^2 = 36$

$x^2 + y^2 + z^2 = 18$ rad $= 3\sqrt{2}$

(7) ઉગમબિંદુમાંથી વર્તુળ $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25$ દોરેલા સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો ....

ઉકેલ:



(0, 0) માંથી પસાર થતી કોઈ રેખા y - mx = 0 છે અને તે વર્તુળ $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 25$ નો સ્પર્શક હોય, જો....

$\frac{-1-7m}{\sqrt{1+m^2}} = 5 \Rightarrow m = \frac{3}{4}, -\frac{4}{3}$

તેથી બંનેના ઢાળનો ગુણાકાર = -1

એટલે કે, $\frac{3}{4} \times -\frac{3}{4} = 1$ જેથી, બે સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો $\frac{\pi}{2}$ છે.

(8)

જો $f(x) = \left(\frac{\sin^m x}{\sin^n x}\right)^{m+n} \cdot \left(\frac{\sin^n x}{\sin^p x}\right)^{n+p} \cdot \left(\frac{\sin^p x}{\sin^m x}\right)^{p+m}$ હોય, તો $f'(x) = \ldots\ldots$

ઉકેલ: $f(x) = (\sin x)^{m^2 - n^2} \cdot (\sin x)^{n^2 - p^2} \cdot (\sin x)^{p^2 - m^2}$

$f(x) = (\sin x)^{m^2 - n^2 + n^2 - p^2 + p^2 - m^2} \quad \therefore f(x) = (\sin x)^0 = 1$

$f'(x) = 0$

(11) $x = 3$ હોય ત્યારે $\sqrt{x^2+16}$ નો $\dfrac{x}{x-1}$ ની સાપેક્ષ બદલવાનો દર ...... છે.

ઉકેલ :ધારો કે $u = \sqrt{x^2+16}$ અને $v = \dfrac{x}{x-1}$

$$\therefore \frac{du}{dx} = \frac{2x}{2\sqrt{x^2+16}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \quad \frac{dv}{dx} = \frac{(x-1)(1)-x(1)}{(x-1)^2}$$

$$\therefore \frac{dv}{dx} = \frac{-1}{(x-1)^2} \ \therefore \frac{du}{dv} = \frac{x}{\sqrt{x^2+16}} \times \frac{(x-1)^2}{-1}$$

$x = 3$ હોય ત્યારે $u = \sqrt{x^2+16}$ નો $v = \dfrac{x}{x-1}$ ની સાપેક્ષ બદલવાનો દર

$$= \left(\frac{du}{dv}\right)_{x=3} = \frac{3}{\sqrt{9+16}} \times \frac{(3-1)^2}{-1} = -\frac{12}{5}$$

(12) $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^n+1)}$ dx બરાબર શું થાય ?

ઉકેલ : $\displaystyle\int \frac{dx}{x(x^n+1)}$

$x^n+1 = t;\ nx^{n-1}dx = dt;\ \dfrac{x^n}{x}\,dx = \dfrac{1}{n}\,dt;$ મૂકતાં, $\dfrac{dx}{x} = \dfrac{dt}{n(t-1)}$

$$\int \frac{dt}{n(t-1)\,t} = \frac{1}{n}\int\left(\frac{A}{t-1}+\frac{B}{t}\right)dt\ ;\ At + B(t-1) = 1$$

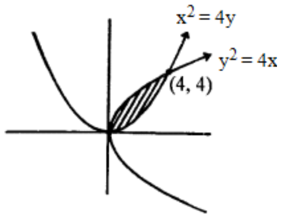
t ના સહગુણકોને સરખાવતાં: $A + B = 0\ ;\ A = -B\ ,\ B = -1$

$$\frac{1}{n}\int\left(\frac{1}{t-1}-\frac{1}{t}\right)dt = \frac{1}{n}\,[\log(t-1) - \log(t)] + c$$

$$= \frac{1}{n}\log\frac{(t-1)}{t} + c = \frac{1}{n}\log\left(\frac{x^n+1-1}{x^n+1}\right) + c = \frac{1}{n}\log\frac{x^n}{x^n+1} + c$$

(17) વક્ર $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$ વડે ઘેરાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફ્ળ = ...

ઉકેલ:



$$A = \int_0^4 \left(2\sqrt{x} - \frac{x^2}{4}\right)dx$$

$$A = \left(\frac{4}{3}x^{3/2} - \frac{x^3}{12}\right)_0^4$$

$A = \dfrac{16}{3}$ ચો.એકમ

(18) $p \wedge (\sim p) = c$ નું દ્વંદ્વ વિધાન કયું છે ?

ઉકેલ : કોઈ વિધાનનું દ્વંદ્વ વિધાન $\wedge$ ને $\vee$ વડે, ને $\wedge$ વડે, c ને t વડે, અને t ને c વડે એક સાથે બદલવાથી મફ્ળે.

$\therefore$ આપેલ વિધાનનું દ્વંદ્વ વિધાન $p \vee (\sim p) = t$ મફ્ળે.

(19)સમીકરણ $a\sin x + b\cos x = c,\ |c| > \sqrt{a^2+b^2}$, ના કેટલા ઉકેલ મળે?

ઉકેલ: $\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\sin x + \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos x = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2}}$

$$\sin(x+\alpha) = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2}} > 1, \quad \text{(as given)}$$

આથી કોઈપણ ઉકેલ મફ્ળતો નથી.

(21) વર્તુફ્ળ ના બિંદુ આગફ્ળા સ્પર્શકનો ઢાફ્ળ ....

ઉકેલ: $hx + hy - a^2 = 0$ નો ઢાફ્ળ -1 છે.

(2 2)

જો $\vec{P} = i + j + k$ અને $\vec{Q} = i + j - k$ અને $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ બે સદિશો હોય કે જેથી $\vec{P} = 2\vec{a} + \vec{b}$ અને $\vec{Q} = \vec{a} + 2\vec{b}$ તો $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ વચ્ચેનો ખૂણો .....

ઉકેલ :આપે લ છે. $2\vec{a} + \vec{b} = i + j + k$

$\vec{a} + 2\vec{b} = i + j - k$

(1) અને (2) ને ઉકેલતાં $\vec{a} = \dfrac{1}{3}(i + j + 3k)$ અને $\vec{b} = \dfrac{1}{3}(i + j - 3k)$ તો cos

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{9}(1+1-9)}{\sqrt{\frac{1}{9}(1+1+9)}\sqrt{\frac{1}{9}(1+1+9)}} \Rightarrow \cos\theta = \frac{\frac{1}{9}(-7)}{\frac{1}{9}\sqrt{11}\sqrt{11}}$$

$$\cos\theta = \frac{-7}{11} \Rightarrow \theta = \cos^{-1}\left(-\frac{7}{11}\right)$$

(24) y - અક્ષની સાપેક્ષે બિંદુ (1, -2) નું પરાવર્તિત બિંદુ કયું હશે ?

ઉકેલ: y - અક્ષની સાપેક્ષે બિંદુ (h, k) નું પ્રતિબિંબ (-h, k) થશે. તેથી, (1, -2) એ (-1, -2) થશે.

(26) □n∈N માટે,(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6) એ ક્યા મોટામાં મોટા ધન પૂર્ણાંક વડે વિભાજ્ય છે ?

ઉકેલ : □n∈N માટે, (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6) એ ક્યા મોટામાં મોટા ધન પૂર્ણાંક વડે વિભાજ્ય છે ?

P(n): (n+2)(n+3)(n+4)(n+5)(n+6), n∈N

P(1) = 3.4.5.6.7 = 120.21; P(2) = 4.56.7.8 = 120.56

P(3) = 5.6.7.8.9 = 120.126; P(4) = 6.78.9.10 = 120.252

P(5) = 7.8.9.10 = 120.42; P(6) = 8.9.10.11.12 = 120.99.13

(27)

વિકલ સમીકરણ $x = 1 + xy\dfrac{dy}{dx} + \dfrac{(xy)^2}{2!}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^2 + \dfrac{(xy)^3}{3!}\left(\dfrac{dy}{dx}\right)^3 + ...$ નો ઉકેલ શું થાય?

ઉકેલ : $x = e^{xy\frac{dy}{dx}}$

$\log x = xy\frac{dy}{dx} \Rightarrow \int \frac{\log x dx}{x} = \int y dy$

$\frac{y^2}{2} = \frac{(\log_e x)^2}{2} + C \Rightarrow y = \pm \sqrt{(\log_e x)^2 + 2C}$

(28) જો $f(x) = 3x - 5$, હોય તો $f^{1}(x) = \ldots\ldots\ldots$

ઉકેલ : $f(x) = y \Rightarrow x = f^{-1}(y)$ લો.

જેથી, $f(x) = y = 3x - 5 \Rightarrow x = \frac{y+5}{3}$

$\Rightarrow f^{-1}(y) = x = \frac{y+5}{3} \quad \therefore f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$

પણ f એ એક-એક અને વ્યાપી છે, તેથી f^{-1} અસ્તિત્વ ધરાવે અને

$f^{-1}(x) = \frac{x+5}{3}$ આપેલ છે.

(29) જો $(1 + x)^{2n} = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_{2n}x^{2n}$ હોય, તો.....

ઉકેલ : $a_0 + a_1 + a_2 \ldots\ldots 2^{2n}$ અને $a_0 + a_2 + a_4 + \ldots\ldots 2^{2n-1}$

$a_n = {}^{2n}C_n$ = ગુરૂત્તમ સહ ગુણક મધ્યમ સહ ગુણાંક હોય

$a_{n-3} = {}^{2n}C_{n-3} = {}^{2n}C_{2n-(n-3)} = {}^{2n}C_{n+3} = a_{n+3}$

(30) જો $(at^2, 2at)$ એ પરવલય $y^2 = 4ax$ ની નાભિ જીવાના એક અંત્યબિંદુના યામ હોય, તો બીજા બિંદુના યામ શોધો.

Answer : D

ઉકેલ: જો પરવલય $y^2 = 4ax$ ની નાભિજીવા અંત્યબિંદુઓના પ્રાંચલ t_1, t_2 હોય, તો $t_1, t_2 = -1$

તેથી જો t એ નાભિજીવાના એક અંત્યબિંદુનો પ્રાચલ હોય, તો બીજા અંત્યબિંદુનો પ્રાચલ $-1/t$ હોય અને જેથી તેના યામ

$\left(a\left(-\frac{1}{t}\right)^2, 2a\left(-\frac{1}{t}\right)\right)$ એટલે કે $\left(\frac{a}{t^2}, -\frac{2a}{t}\right)$ હોય.