Paper - 13 Solutiuon

(1)

$\lim_{x \to 3} ([x-3]+[3-x]-(x))$, જ્યાં e[.] મહતમ પૂર્ણાંક સંખ્યા દર્શાવે છે.

ઉકેલ : ડાબી બાજુનું

લક્ષ $\lim_{h\to 0} ([(3-h)-3]+[3-(3-h)]-(3-h))$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} ([-h]+[h]-3+h)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} (-1+0-3+h) = -4$

જમણી બાજુનું લક્ષ

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} ([(3+h)-3]+[3-(3+h)]-(3+h))$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} ([h]+[-h]-3-h)$

$\Rightarrow \lim_{h\to 0} (0-1-3+h) = -4$

$\therefore \lim_{x\to 3} ([x-3]+[3-x]-x) = -4$

(3) જો ABCD ચક્રિય ચતુષ્કોણ હોય, તો cos A + cos B + cos C + cos D નું મૂલ્ય = ...

ઉકેલ : ચક્રિય ચતુષ્કોણમાં $\angle A + \angle C = 180^\circ$ અને $\angle B + \angle D = 180^\circ$

cos(180 - C) + cos(180 - D) + cos C + cos D

= -cos C - cos D + cos C + cos D = 0

(4) જો $n \in N$ હોય તો $11^{n+2} + 12^{n+1}$ નીચે પૈકી કોના વડે ભાગી શકાય?

ઉકેલ : n = 1 લેતાં $11^{n+2} + 12^{2n+1} = 11^3 + 12^3 = 1331 + 1728 = 3059 = 133(23)$

$\therefore 11^{n+2} + 12^{2n+1}$, $n \in N$ એ 133 વડે વિભાજ્ય છે, તે સ્પષ્ટ છે.

(8) જો $12x^2 + 7xy - py^2 - 18x + qy + 6 = 0$ સમીકરણ લંબ સુરેખાઓની જોડ દર્શાવે તો .....

ઉકેલ: 5" આપેલ સમીકરણ સુરેખાઓની જોડ દર્શાવે છે, તેથી

$$-72p - \frac{63}{2}q - 3q^2 + 81p - \frac{147}{2} = 0 \text{ ...... (i)}$$

પણ, આપેલ સમીકરણ લંબ રેખાઓ દર્શાવે છે.

$\therefore 12 - p = 0 \Rightarrow p = 12$

$\therefore$ (i) પરથી $2q^2 + 21q - 23 = 0 \Rightarrow q = 1$

(9) બિંદુઓ (3, 4, 1) અને (5, 1, 6) ને જોડતી રેખા અને xy-સમતલનું છેદબિંદુ શુ થાય ?

ઉકેલ: માટે xy - સમતલ, $z = 0 \Rightarrow \frac{6\lambda+1}{\lambda+1} = 0 \Rightarrow \lambda = -\frac{1}{6}$

$$\therefore x = \frac{-5+18}{5} = \frac{13}{5},\ y = \frac{-1+24}{5} = \frac{23}{5}.$$

(11) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = ...$

ઉકેલ: $\int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1-(x-1)^2}} = \sin^{-1}(x-1) + c.$

(12) શિક્ષક અને ત્રણ વિદ્યાર્થીઓની સરેરાશ ઉંમર 20 વર્ષ છે. જો બધા જ વિદ્યાર્થીઓ સમાન ઉંમરના હોય અને શિક્ષકની ઉંમર અને તેમાના વિદ્યાર્થીઓની ઉંમરનો તફાવત 20 વર્ષ હોય તો શિક્ષકની ઉંમર શોધો.

ઉકેલ : ધારો કે દરેક વિદ્યાર્થીની ઉંમર x વર્ષ છે. તો શિક્ષકની ઉંમર (x + 20) વર્ષ થાય.

$$\frac{(x+20)+3x}{4} = 20 \Rightarrow x = 15$$

આથી શિક્ષકની ઉંમર = 35 વર્ષ

(13) જો શ્રેણીક $\begin{bmatrix} 1 & 3 & \lambda+2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 10 \end{bmatrix}$ એ શુન્ય શ્રેણીક છે, તો λ = ...

ઉકેલ: જો $\begin{vmatrix} 1 & 3 & \lambda+2 \\ 2 & 4 & 8 \\ 3 & 5 & 10 \end{vmatrix} = 0$

$\Rightarrow 1(40-40) - 3(20-24) + (\lambda+2)(10-12) = 0$

$\Rightarrow 2(\lambda+2) = 12 \Rightarrow \lambda = 4.$

(14) વિધેય f: R → R બધાં x, y ∈ R અને $f(1) > 0$ {ટે $f(x) f(y) - f(xy) = x + y$ સમીકરણને સંતોષે છે, તો $f(x)$ = ……..

(1 5)

વિકલ સમીકરણ $\frac{d^2y}{dx^2} + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = x^2 \log\left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)$ નું પરિમાણ .... છે.

ઉકેલ : આ સમીકરણ વિકલિતોની બહુપદી સ્વરૂપે ન હોવાથી પરિણામ વ્યાખ્યાયિત નથી.

(16) વક્રો $y^2 = 4x$ અને $x^2 = 4y$ નો છેદન કોણ શોધો.

ઉકેલ : બે વક્રોના સમીકરણ $y^2 = 4x$ …… (i) અને $x^2 = 4y$ ….. (ii)

(i) પરથી આપણે મેળવ્યું, $x = \frac{y^2}{4}$ (ii) માં $x = \frac{y^2}{4}$ મૂકતાં,

$\left(\frac{y^2}{4}\right)^2 = 4y$ મળે. $\Rightarrow y^4 - 64y = 0$

$\Rightarrow y(y^3 - 64)) = 0$, y = 0, y = 4

(i) પરથી જ્યારે y = 0 હોય ત્યારે x = 0 થાય અને જ્યારે y = 4 હોય ત્યારે x = 4 થાય.

આથી (0, 0) અને (4, 4) આગફ બે વક્રો છેદે.

x સાપેક્ષ (i) નું વિકલન કરતાં, $2y\dfrac{dy}{dx} = 4 \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{y}$ ......(iii)

x સાપેક્ષ (ii) નું વિકલન કરતાં, $2x = 4\dfrac{dy}{dx} \Rightarrow \dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x}{2}$......(iv)

(0, 0) આગ છેદન કોણ

(iii) પરથી, $m_1 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = \infty$

તેથી (i) વક્ર પર (0, 0) આગળનો સ્પર્શક y અક્ષને સમાંતર હોય.

(iv) પરથી, $m_2 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(0,0)} = 0$

તેથી (ii) વક્ર પર (0, 0) આગફનો સ્પર્શક x અક્ષને સમાંતર હોય.
આથી, (0, 0) આગફ બે વક્રોના સ્પર્શકો વચ્ચેનો ખૂણો કાટખૂણો થાય.
પરિણામે બે વક્રો (0, 0) આગફ કાટખૂણે છેદે છે.
(4, 4) આગફ છેદન કોણ :

(iii) પરથી $m_1 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(4,4)} = \dfrac{2}{4} = \dfrac{1}{2}$

(iv) પરથી $m_2 = \left(\dfrac{dy}{dx}\right)_{(4,4)} = \dfrac{4}{2} = 2$

બે વક્રો વચ્ચેનો છેદન કોણ θ લઈએ તો :

$$\tan\theta = \left|\frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 m_2}\right| = \left|\frac{2 - (1/2)}{1 + 2 \times (1/2)}\right| = \frac{3}{4}$$

(18)

ધારો કે $\vec{a}$ અને $\vec{b}$ બે અસમરેખ સદિશો હોય, તો x અને y ના કયા મુલ્ય માટે $2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$ સાચુ હોય ?

જ્યાં $\vec{u} = x\vec{a} + 2y\vec{b}, \vec{v} = -2y\vec{a} + 3x\vec{b}, \vec{w} = 4\vec{a} - 2\vec{b}$ હોય, તો....

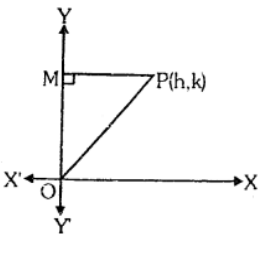
ઉકેલ : આપણી પાસે $2\vec{u} - \vec{v} = \vec{w}$

$\therefore (2x + 2y - 4)\vec{a} + (-3x + 4y + 2)\vec{b} = 0$

$\Rightarrow 2x + 2y - 4 = 0$ અને $-3x + 4y + 2 = 0$

$\Rightarrow x = \dfrac{10}{7}, y = \dfrac{4}{7}$

(19) એક એવા બિંદુનો બિંદુ પથ શોધો કે જે એવી રીતે ખસે છે કે જેનું (0, 0) બિંદુથી અંતર y - અક્ષથી અંતર કરતાં બમણું હોય.
ઉકેલ :



ધારો કે P (h, k) ખસતું બિંદુ છે.
જેનો માંગેલ બિંદુપથ

પૂર્વધારણા વડે | OP | = 2 | PM | (કારણ કે P કોઈ ચરણમાં હોય

$\Rightarrow \sqrt{(h^2 + k^2)} = 2|h|$

બંને બાજુ વર્ગ કરતાં,

$h^2 + k^2 = 4h^2$

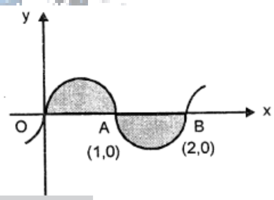
$\Rightarrow 3h^2 - k^2 = 0$

(h, k) માંથી (x, y) કરતાં

$3x^2 - y^2 = 0$

જે P નું માંગેલ બિંદુ પથ છે.

(20) વક્ર y = x (x - 1) (x - 2) અને x - અક્ષ વચ્ચેનું ક્ષેત્રફફ શોધો.
ઉકેલ:



માંગેલું ક્ષેત્રફળ $= \displaystyle\int_0^1 x(x-1)(x-2)\,dx + \left|\int_1^2 x(x-1)(x-2)\,dx\right|$

$= \dfrac{1}{4}(x^4 - 4x^3 + 4x^2)_0^1 + \dfrac{1}{4}\left|(x^4 - 4x^3 + 4x^2)_1^2\right|$

$= \dfrac{1}{4}\,[1 + |(16 - 32 + 16) - (1 - 4 + 4)|] = \dfrac{1}{2}$

(24) નીચે આપેલ વિધાન S અને R સ્વીકારો

S : sin x અને cosx બંને અંતરાલ $\left(\dfrac{\pi}{2}, \pi\right)$ માં ઘટતાં વિધેય છે.

R : જો અંતરાલ (a, b) માં વિકલ્પની વિધેય ઘટતું હોય તો તેનું વિકલીત પણ અંતરાલ (a, b) માં ઘટતું હોય.
નીચેનામાંથી કયું સાચું છે ?

ઉકેલ : આપણે અવલોકન કર્યું કે sin x અને cos x $\left[\dfrac{\pi}{2}, \pi\right]$ પર ઘટે છે. તેથી, એ સાચું છે.

જો આપણે $f(x) = \dfrac{1}{x}$ □x ∈ (1, 2) લઈએ તો f એ ઘટતું અને $f'(x)$ એ (1, 2) {i વધતું વિધેય છે.

જ્યારે $f'(x) = -\dfrac{1}{x^2} < 0$ અને $f''(x) = \dfrac{2}{x^3} > 0$

□x ∈ (1, 2) $\therefore$ R સાચું નથી.

(25) વિધાન $p \to (q \to p)$ કોના સાથે સમતુલ્ય છે ?

ઉકેલ : કારણ કે $p \to (q \to p)$ ખોટું છે.
$\Rightarrow$ p સાચો છે. અને $(q \to p)$ ખોટું છે. જે શક્ય નથી.
તેથી $p \to (q \to p)$ હંમેશા સાચું હોય. એટલે કે તે માત્ર પુનરાવૃતિ હોય.
ફરીથી $p \to (p \vee q)$ ખોટું છે.
p સાચો છે. અને $(p \vee q)$ ખોટું છે. જે શક્ય નથી.

તેથી $p \to (p \vee q)$ હંમેશા સાચું હોય. એટલે કે તે માત્ર પુનરાવૃતિ છે.
જેથી $p \to (q \to p) \equiv p \to (p \vee q)$

(26) $\begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 2a & 3a+2b & 4a+3b+2c \\ 3a & 6a+3b & 10a+6b+3c \end{vmatrix}$ નું મૂલ્ય શોધો.

ઉકેલ : $R_2 \to R_2 - 2R_1$
$R_3 \to R_3 - 3R_1$ નો ઉપયોગ કરતાં

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 3a & 7a+3b \end{vmatrix} \quad R_3 \to R_3 - 3R_2$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & a+b & a+b+c \\ 0 & a & 2a+b \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix} = a^3$$

(27) શ્રેણી $1, 2, 2^2, \ldots 2^n$ નો ગુણોત્તર મધ્યક...... છે.
ઉકેલ : $1, 2, 2^2, \ldots 2^n$ આ $n+1$ સંખ્યાઓનો ગુણોત્તર મધ્યક

$$= (1.2.2^2.....2^n)^{\frac{1}{n+1}} = (2^{0+1+2+.....+n})^{\frac{1}{n+1}} = \left(2^{\frac{n(n+1)}{2}}\right)^{\frac{1}{n+1}} = 2^{\frac{n}{2}}$$