PAPER - 11 Solution

(1) વક્ર C ગુણધર્મ દર્શાવે છે કે જો C પરનાં કોઈપણ બિંદુ P આગળ દોરેલો સ્પર્શક યમાક્ષોને A અને B આગળ મળે, તો P એ AB નું મધ્યબિંદુ હોય. જો વક્ર (1, 1) બિંદુમાંથી પસાર થતો હોય, તો વક્રનું સમીકરણ

ઉકેલ : ધારો કે AB નું મધ્યબિંદુ (x, y) છે.

$\Rightarrow \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$, AB નો ઢાળ

$\frac{dy}{dx} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-b}{a}$

$x = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2x$ અને $y = \frac{b}{2} \Rightarrow b = 2y$

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2y}{2x} = -\frac{y}{x}$

$\Rightarrow xdy + ydx = 0 \Rightarrow \int d(xy) = 0$

અથવા $xy = c$ (1, 1) માંથી પસાર થાય છે. તે તેમ દર્શાવે છે. $c = 1$

$\Rightarrow xy = 1$

(6) λ ના કયા મુલ્ય માટે સદિશો i + 2j + 3k, λi + 4j + 7k, - 3i - 2j - 5k સમતલીય હોય ?

ઉકેલ : ઉપરના સદિશો લંબ હેય, તો

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ \lambda & 4 & 7 \\ -3 & -2 & -5 \end{vmatrix} = 0$$

$1(-20 + 14) - 2(-5\lambda + 21) + 3(-2\lambda + 12) = 0$; $\lambda = 3$

(8) જો A = {2, 3, 4, 8, 10}, B = {3, 4, 5, 10, 12} અને C = {4, 5, 6, 12, 14} હોય, તો (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) = ...

ઉકેલ : (A ∪ B) ∩ (A ∪ C) = A ∪ (B ∩ C)

= {2, 3, 4, 8, 10} ∪ {4, 5, 12} = {2, 3, 4, 5, 8, 10, 12}

(10) ચાર બિંદુઓ (0, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 0, 0) અને (0, 0, 4)માંથી પસાર થતા ગોલકનું કેન્દ્ર શુ છે ?

ઉકેલ : ધારો કે ગોલકનું સમીકરણ $x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$

∵ તે ઊગમબિંદુ (0, 0, 0) માંથી પસાર થાય છે

∴ d = 0 તે (0, 2, 0)માંથી પણ પસાર થાય છે.

∴ 4 + 4v = 0 ⇒ v = -1અને તે (1, 0, 0)માંથી પસાર થાય છે.

∴ 1 + 2u = 0 ⇒ u = -1/2 અને તે (0, 0, 4)માંથી પસાર થાય છે.

∴ 16 + 8w ⇒ w = -2

∴ કેન્દ્રમાં $(-u, -v, -w) = \left(\frac{1}{2}, 1, 2\right)$.

(11)

વિધાન : 1 - દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n \geq 2$ માટે $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > \sqrt{n}$

વિધાન : 2 - દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા $n \geq 2$ માટે $\sqrt{n(n+1)} < n+1$

ઉકેલ : $\sqrt{n(n+1)} < \sqrt{(n+1)(n+1)}$

એટલે કે $\sqrt{n(n+1)} < n+1 \quad \forall n \in N$

આથી વિધાન - 2 સાચું છે.

n = 2 માટે, આપેલ પરિણામ સાચું છે.

ધારો કે તે $n = K \in N, K \geq 2$ માટે સાચું હોય,

$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{K}} > \sqrt{K}$

$\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{K}} + \frac{1}{\sqrt{K+1}} > \sqrt{K} + \frac{1}{\sqrt{K+1}}$

તો $= \frac{\sqrt{K(K+1)} + 1}{\sqrt{K+1}} > \frac{\sqrt{KK} + 1}{\sqrt{K+1}} = \sqrt{K+1}$

(∵ વિધાન - 2 વડે $\sqrt{n(n+1)} < n+1 \Rightarrow \sqrt{n} < \sqrt{n+1}$)

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + ... + \frac{1}{\sqrt{K+1}} > \sqrt{K+1}$

આથી, વિધાન - 1 દરેક પ્રાકૃતિક સંખ્યા માટે સાચું છે. $n \geq 2$

(13) $\frac{d}{dx}\left[\log_e e^{\sin(x^2)}\right] = ...$

ઉકેલ : $\frac{d}{dx}\left[\log_e e^{\sin(x^2)}\right]$

$= \frac{d}{dx}[\sin x^2 \log_e e] = \cos x^2 \frac{d}{dx} x^2 = 2x \cos x^2$

(14) જો $\tan^2\theta - (1+\sqrt{3})\tan\theta + \sqrt{3} = 0$, હોય, તો θ નું મૂલ્ય = ...

ઉકેલ: $\tan^2\theta - \tan\theta - \sqrt{3}\tan\theta + \sqrt{3} = 0$

$\tan\theta[\tan\theta - 1] - \sqrt{3}[\tan\theta - 1] = 0$

$\Rightarrow \tan\theta = 1, \tan\theta = \sqrt{3}$

$\theta = n\pi + \frac{\pi}{4}, \quad \theta = n\pi + \frac{\pi}{3}$

(15)

રેખાઓ $\frac{x-2}{1} = \frac{y-3}{1} = \frac{z-4}{-k}$ અને $\frac{x-1}{k} = \frac{y-4}{2} = \frac{z-5}{1}$ સમતલીય હોય તો $k = ...$

ઉકેલ : અહિં રેખાઓ સમતલીય છે. $\therefore$ સમતલીય રેખાઓની શરત મુજબ

$$\begin{vmatrix} x_2-x_1 & y_2-y_1 & z_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore \begin{vmatrix} 2-1 & 3-4 & 4-5 \\ 1 & 1 & -k \\ k & 2 & 1 \end{vmatrix} = 0 \quad \therefore 1(1+2k)+1(1+k^2)-1(2-k)=0$$

$\therefore k^2 + 3k = 0 \quad \therefore k = 0 \text{ or } k = -3$

(16) બિંદુ (4, 10) માંથી પરવલય $y^2 = 9x$ પર દોરેલા સ્પર્શકનો ઢાળ શું થાય ?

ઉકેલ : પરવલય $y^2 = 9x$ ના m ઢાળવાળા સ્પર્શકનુંસમીકરણ $y = mx + \frac{9}{4m}$ થાય છે.

જો તે (4, 10) માંથી પસાર થતું હોય, તો

$10 = 4m + \frac{9}{4m} \Rightarrow 16m^2 - 40m + 9 = 0$

$\Rightarrow (4m-1)(4m-9) = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{4}, \frac{9}{4}$

(18) જો $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix}$, તો $A^4 = ...$

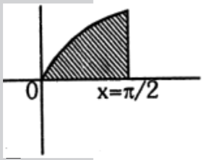
ઉકેલ: $A = 3\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow A^2 = 9\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$= 9\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 27\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

$A^4 = (A^2)^2 = 729\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 729\begin{bmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 \end{bmatrix} = 729A$

(19) વક્ર $y = \sin^3 x$, x - અક્ષ અને યામ $x = 0$ થી $x = \pi/2$ વડે ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ = ...

ઉકેલ:



વક્ર $y = \sin^3 x$, x − અક્ષ અને $x = 0$ to $x = \pi/2$

માંગેલું ક્ષેત્રફળ $= \int_0^{\pi/2} \sin^3 x\,dx$

$= \frac{3-1}{2} = \frac{2}{3}$ ચો.એકમ (વાલીના સૂત્ર દ્વારા)

(20) ઉપવલય $9x^2 + 5y^2 - 30y = 0$ ની ઉત્કેન્દ્રતા ....

ઉકેલ : $9x^2 + (\sqrt{5}y - 3\sqrt{5})^2 = 45$ અથવા $\frac{x^2}{5} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$

$\Rightarrow a^2 = 5, b^2 = 9$ તેથી, $e = \frac{2}{3}$

(23) બે પાસા એકસાથે નાખતા, તે પૈકી ઓછામાં ઓછા એક પાસાનો અંક 3 કરતા મોટો હોવાની સંભાવના કેટલી થાય ?

ઉકેલ : કુલ નિઃશેષ કિસ્સા $= 6^2 = 36$

આ કિસ્સાઓ પૈકી નીચે આપેલ 9 જોડ શક્ય નથી.

(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2), (3, 3)

∴ સંભાવના = 1 - 9/36 = 3/4

(24) Rs.100 ની 4 નોટ અને Rs.1, Rs.2, Rs.5, Rs.20 અને Rs.50 એ દરેકની એક-એક નોટ 3 બાળકને એવી રીતે વહેચવી છે કે જેથી દરેક બાળકને Rs. 100 ની એક નોટ મળે જ. આવી વહેચણી કુલ .....રીતે થઈ શકે.

ઉકેલ : રૂ. 100 ની 3 નોટ લઈ 3 બાળક પૈકી દરેકને એક-એક આપી દઈએ, જે એક જ રીતે અપાય.

હવે, રૂ. 100 ની 1 નોટ અને બીજી જુદી જુદી 5 નોટ મળી 6 નોટ વહેંચવી છે.

પ્રત્યેક નોટ 3 રીતે વહેંચી શકાય.

કુલ વહેંચણી $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^6$ રીતે થાય.

(25) જો (0, 0) કેન્દ્ર વાળુ વર્તુળ, રેખા $5x + 12y = 1$ ને સ્પર્શે, તો તેનું સમીકરણ....

ઉકેલ:

ત્રિજ્યા = (0, 0) માંથી રેખા $5x + 12y - 1 = 0$ પર દોરેલા લંબની લંબાઈ

$$= \frac{|5(0) + 12(0) - 1|}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{1}{13}$$

વર્તુળ નું સમીકરણ $x^2 + y^2 = \frac{1}{169} \Rightarrow 169\,(x^2 + y^2) = 1$

(26) વક્ર $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$ અને $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$ ને θ - બિંદુ એ અભિલંબ.....

ઉકેલ : અહીં $x = a(\cos\theta + \theta\sin\theta)$ અને $y = a(\sin\theta - \theta\cos\theta)$

$$\therefore \frac{dx}{d\theta} = a\left(-\sin\theta + (\theta\cos\theta + \sin\theta)\right) = a\theta\cos\theta \text{ અને}$$

$$\frac{dy}{d\theta} = a(\cos\theta - (-\theta\sin\theta + \cos\theta)) = a\theta\sin\theta$$

$$\therefore \frac{dy}{d\theta} = \frac{\frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta}} = \frac{a\theta\sin\theta}{a\theta\cos\theta} = \tan\theta$$

∴ વક્રને θ બિંદુએ અભિલંબનો ઢાળ = - cot θ

∴ વક્રને θ બિંદુએ અભિલંબનું સમીકરણ $y - y_1 = m(x - x_1)$ પરથી

$y - a\sin\theta + a\theta\cos\theta$

$= -\cot\theta\,(x - a\cos\theta - a\theta\sin\theta)$ $y\sin\theta - a\sin^2\theta + a\theta\cos\theta\sin\theta$

$= -x\cos\theta + a\cos^2\theta + a\theta\sin\theta\cos\theta$

$\therefore x\cos\theta + y\sin\theta = a\cos^2\theta + a\sin^2\theta$

$\therefore \cos\theta + y\sin\theta = a$ જે અભિલંબનું સમીકરણ છે.

(27) ફુગ્ગો કે જે હંમેશા ગોળાકાર રહે તે માટે 900 ઘન સેમી/સેકન્ડના દરથી વાયુ વડે ફુલાવવામાં આવે છે. જ્યારે ત્રિજ્યા 15 સેમી હોય ત્યારે કેટલા દરથી ફુગ્ગાની ત્રિજ્યા વધે છે.

ઉકેલ: $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4 \,.\, \pi\, r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow 900 = 4 \,.\, \pi \,.\, 225 \,.\, \frac{dr}{dt} \quad [\because r = 15, \frac{dV}{dt} = 900\ cm^2/sec]$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{\pi}\ cm/sec$$

(29)

$x \neq 0$ માટે $\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}x\right) + \tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x\right)$ બરાબર શું થાય ?

ઉકેલ: $\tan\left[\frac{\pi}{4} + \frac{1}{2}\cos^{-1}x\right] + \tan\left[\frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}\cos^{-1}x\right],\ x \neq 0$

$\cos^{-1}x = \theta$ મૂક્તાં, $\tan\left[\frac{\pi}{4} + \frac{\theta}{2}\right] + \tan\left[\frac{\pi}{4} - \frac{\theta}{2}\right]$

$$\frac{1 + \tan\frac{\theta}{2}}{1 - \tan\frac{\theta}{2}} + \frac{1 - \tan\frac{\theta}{2}}{1 + \tan\frac{\theta}{2}} = \frac{2\left(1 + \tan^2\frac{\theta}{2}\right)}{1 - \tan^2\frac{\theta}{2}} = \frac{2}{\cos\theta} = \frac{2}{x}$$