PAPER - 10 Solution

(1) બિંદુ (1, 5)માંથી વર્તુળ $2x^2 + 2y^2 = 3$ પર દોરેલા સ્પર્શકની લંબાઈ ……
ઉકેલ : વર્તુળના સમીકરણનો 2 વડે ભાગાકાર કરતાં

$$x^2 + y^2 = \frac{3}{2} \Rightarrow \left(x^2 + y^2 - \frac{3}{2}\right) = 0$$

$$\therefore \text{સ્પર્શકની લંબાઈ} = \sqrt{(1)^2 + (5)^2 - \frac{3}{2}} = \sqrt{26 - \frac{3}{2}} = \frac{7}{\sqrt{2}} = \frac{7\sqrt{2}}{2}$$

(4) જો $(1 + x)^{2n+2}$ નું મધ્યપદનો સહગુણક p તથા $(1 + x)^{2n+1}$ ના મધ્યપદોના સહગુણકો q, r હોય તો……..
ઉકેલ : $(1 + x)^{2n+2}$ માં મધ્યમપદ $(n+2)^{th}$ મું પદ બને.

$$\therefore p = {}^{2n+2}C_{n+1}$$

$(1+x)^{2n+1}$ માં મધ્યમપદ $(n+1)^{th}$ મું તથા $(n+2)^{th}$ પદ બને.

$$\therefore q = {}^{2n+1}C_n, \quad r = {}^{2n+1}C_{n+1}$$

પરંતુ ${}^{2n+1}C_n + {}^{2n+1}C_{n+1} = {}^{2n+2}C_{n+1} \quad \therefore q + r = p$

(5) પરવલય $x^2 = 4ay$ ની જીવા કે જે શિરોબિંદુમાંથી પસાર થાય અને જે $\tan\alpha$ ઢાળ ધરાવે તો તેની લંબાઈ શોધો.
ઉકેલ : ધારો કે A શિરોબિંદુ છે. અને AP એ $x^2 = 4ay$ ની એવી જીવા છે કે જેથી AP નો ઢાળ $\tan\alpha$ છે. ધારો કે P ના યામ $(2at, at^2)$ છે.

$$\text{AP નો ઢાળ} = \frac{at^2}{2at} = \frac{t}{2} \Rightarrow \tan\alpha = \frac{t}{2} \Rightarrow t = 2\tan\alpha$$

$$\text{હવે, } AP = \sqrt{(2at - 0)^2 + (at^2 - 0)^2} = at\sqrt{4 + t^2}$$

$$= 2a\tan\alpha\sqrt{4 + 4\tan^2\alpha} = 4a\tan\alpha\sec\alpha$$

(7 (1,0) માંથી પસાર થતા અને જેનો ઢાળ $\frac{y-1}{x^2+x}$ હોય તે વક્રનું સમીકરણ ……. છે.

$$\text{ઉકેલ : ઢાળ} = \frac{dy}{dx} \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y-1}{x^2+x} \Rightarrow \frac{dy}{y-1} = \frac{dx}{x^2+x}$$

$$\Rightarrow \int \frac{1}{y-1}dy = \int\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x+1}\right)dx + c \Rightarrow \frac{(y-1)(x+1)}{x} = k$$

$x = 1, y = 0, k = -2$ લેતાં, સમીકરણ $(y - 1)(x + 1) + 2x = 0$ છે.

(11) જો $y = \tan^{-1}\left(\frac{\log(e/x^2)}{\log ex^2}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3 + 2\log x}{1 - 6\log x}\right)$ હોય, તો $\frac{dy}{dx}$ શોધો.

$$\text{ઉકેલ: } y = \tan^{-1}\left(\frac{\log e - \log x^2}{1 + 2\log x}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{3 + 2\log x}{1 - 3(2\log x)}\right)$$

$$= \tan^{-1}(\log e) - \tan^{-1}(2\log x) + \tan^{-1}(3) + \tan^{-1}(2\log x)$$

$$= \tan^{-1}(A) + \tan^{-1}(3) \quad \therefore \frac{dy}{dx} = 0$$

(13) ધારો કે f એવું વિધેય છે કે બધા વાસ્તવિક x માટે સતત અને વિકલનીય છે.જો બધા $x \in [2, 4]$ માટે $f(2) = -4$ અને $f'(x) \geq 6$ હોય, તો…….

ઉકેલ: $f(2) = -4$

$f'(x) \geq 6 \quad x \in [2, 4]$

$$f'(x) = \frac{f(4) - f(2)}{(4 - 2)} \quad \therefore f'(x) \geq 6$$

$$\frac{f(4) - f(2)}{2} \geq 6$$

$f(4) + 4 \geq 12$

$f(4) \geq 8$

(1 4)

જો $f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x}, x \neq n\pi$, હોય, તો (x) ના વાસ્તવિક મૂલ્યો માટે $f(x)$ ના મૂલ્યોનો

$$\text{ઉકેલ: } f(x) = \frac{\sin 3x}{\sin x} = \frac{3\sin x - 4\sin^3 x}{\sin x} = \frac{\sin x(3 - 4\sin^2 x)}{\sin x}$$

$$\text{હવે, } 3 - 4\sin^2 x = y \Rightarrow \sin^2 x = \frac{3 - y}{4}$$

પરંતુ $0 < \sin^2 x \leq 1, \quad \because \sin x = 0, \ x = n\pi$

$$0 < \frac{3 - y}{4} \leq 1 \Rightarrow 0 < 3 - y \leq 4$$

$$-3 < -y \leq 1 \Rightarrow -1 \leq y < 3 \Rightarrow [-1, 3)$$

(15)
ઉકેલ : અહી રેખા અને સમતલ સમાંતર છે માટે રેખા અને સમતલ વચ્ચેનું અંતર શોધવા રેખા પરનું કોઇ બિંદુ (1, - 2, 1). લો
હવે બિંદુ (1, - 2, 1) થી સમતલનું લંબઅંતર એ માંગેલ અંતર થશે.

$$\text{તેનું અંતર} = \left|\frac{2(1) + 2(-2) - 1(1) - 6}{\sqrt{2^2 + 2^2 + 1^2}}\right| = \frac{9}{\sqrt{9}} = 3.$$

(17) વિધાન $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$ નીચે પૈકી શું છે ?
ઉકેલ : કારણ કે $(p \wedge \sim q) \wedge (\sim p \vee q)$
$\equiv (p \wedge \sim q) \wedge \sim(p \wedge \sim q)$ (દ' મોર્ગનના નિયમ પરથી)

≡ c, જ્યાં c વિરોધી વિધાન છે.   (કોટિ પૂરકના નિયમ પરથી)

(22) જો i - 2j + 3k અને 2i + j + k વચ્ચેનો ખૂણો θ હોય, તો θ = …….

ઉકેલ : આપણે જાણીએ છીએ કે $\sin\theta = \frac{|\vec{a} \times \vec{b}|}{|\vec{a}||\vec{b}|}$

હવે, $\vec{a} \times \vec{b} = -5i + 5j + 5k$

$\therefore \left|\vec{a}\times\vec{b}\right| = \sqrt{(5)^2 + (5)^2 + (5)^2} = \sqrt{75} = 5\sqrt{3}$

$|\vec{a}| = \sqrt{1+4+9}, |b| = \sqrt{4+1+1}$

$\therefore \sin\theta = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{1+4+9}\sqrt{4+1+1}} = \frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{14}\sqrt{6}} = \frac{5}{\sqrt{28}} = \frac{5}{2\sqrt{7}}$

(2 4)

P (4, -5, 3) નું $\bar{r} = (5,-2,6)+(3,-4,5), k\in R$ થી લંબઅંતર શોધો.

ઉકેલ : અહીં, $\bar{p} = (4,-5,3)$ તથા $\bar{a} = (5,-2,6)$

$\therefore \bar{p}-\bar{a} = (-1,-3,-3)$ તથા $\bar{l} = (3,-4,5)$

$(\bar{p}-\bar{a})\times\bar{l} = (-27,-4,13)$

$\therefore$ માગેલ લંબઅંતર $= \frac{|(\bar{p}-\bar{a})\times\bar{l}|}{|\bar{l}|} = \sqrt{\frac{729+16+169}{9+16+25}} = \sqrt{\frac{547}{25}}$

(25) સમાંતર શ્રેણીના પ્રથમ ચાર પદોનો સરવાળો 56 થાય અને તેના અંતિમ ચાર પદોનો સરવાળો 112 થાય છે. જો તેનું પ્રથમ પદ 11 હોય, તો તેના પદોની સંખ્યા કેટલી હશે ?

ઉકેલ : 11 + (11 + d) + (11 + 2d) + (11 + 3d) = 56 $\Rightarrow$ d = 2

અને [{11 + (n - 1)2} + {11 + (n - 2)2} + {11 + (n - 3)2} + {11 + (n - 4)2} = 112

$\Rightarrow$ n = 11

(26) $z^2 + az + b = 0$ સમકરણના બીજ z_1 અને z_2 છે જ્યાં z સંકર સંખ્યા છે જો ઉગમબિંદુ, z_1 અને z_2 ત્રણ બિંદુઓ સમભુજ ત્રિકોણનો શિરોબિંદુઓ હોય તો

ઉકેલ : z_1, z_2 એ $z^2 + az + b = 0$ સમીકરણના બીજ છે.

$\therefore z_1 + z_2 = -a,\ z_1 \cdot z_2 = b$

હવે 0, z_1, z_2 એ સમભુજ ત્રિકોણના શિરોબિંદુ છે.

$0^2 + z_1^2 + z_2^2 = 0 \cdot z_1 + z_1 \cdot z_2 + 0 \cdot z_2$

$\therefore\ z_1^2 + z_2^2 = z_1z_2 \quad \therefore (z_1 + z_2)^2 = 3z_1 \cdot z_2 \quad \therefore a^2 = 3b$

(27) પરવલય $y^2 = 4x$ ની અંદર બાજુએ બનેલા ત્રિકોણ કે જેના શિરોબિંદુઓના યામ 1, 2 અને 4, હોય તો તેનું ક્ષેત્રફળ કેટલું હશે?

ઉકેલઃ ધારો કે શિરોબિંદુઓના યામ = (a, 1), (b, 2), (c, 4)

$a = \frac{1}{4}, b = 1, c = 4$ દ્વારા બનતા ત્રિકોણનું ક્ષેત્રફળ

$\left(\frac{1}{4}, 1\right), (1, 2)\ (4, 4)\ \frac{1}{2}\begin{vmatrix} 1/4 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 4 & 4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{3}{4}$ છે.

(28) એક માણસ 4500 ચલણી નોટોની ગણતરી કરે છે. ધારો કે a_n નોટોની સંખ્યા દર્શાવે છે. તે n મિનીટમાં ગણતરી કરે છે. જો $a_1 = a_2 = \ldots = a_{10} = 150$ અને $a_{10}, a_{11}, \ldots$ સમાંતર શ્રેણીના સામાન્ય તફાવત -2 સાથે હોય, તો તેના દ્વારા બધી નોટોની ગણતરી કરવા માટે લાગતો સમય કેટલો હશે ?

ઉકેલ : 4500 = 150 × 10 + {148 + 146 + …… n પદ સુધી}

$= 1500 + \frac{n}{2}\{296 + (n-1)(-2)\}$

$\Rightarrow n^2 - 149n + 3000 = 0$

$\Rightarrow (n - 24)(n - 125) = 0 \Rightarrow n = 24 \quad \because n \neq 125$

તેથી લાગતો કુલ સમય = 10 + 24 = 34 મિનિટ

(29) $x\frac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$ નો ઉકેલ .... છે.

ઉકેલ : અહીં, $x\frac{dy}{dx} = y(\log y - \log x + 1)$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}\left(\log\frac{y}{x} + 1\right) \quad \frac{y}{x} = v$ આદેશ લેતાં $y = vx$

$\therefore \frac{dy}{dx} = v + x\frac{dv}{dx} \quad \therefore v + x\frac{dv}{dx} = v(\log v + 1)$

$\therefore x\frac{dv}{dx} = v\log v \quad \therefore \frac{dv}{v\log v} = \frac{dx}{x}$

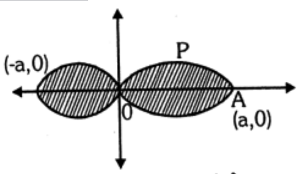
બંને બાજુ સંકલન કરતાં, $\therefore \int\frac{\frac{1}{v}dv}{\log v} = \int\frac{dx}{x}$

$\therefore \log|\log v| = \log|x| + \log|c|$ (c સ્વૈર અચળ)

$\therefore \log|\log v| = \log|cx| \quad \therefore \log v = cx \quad \therefore \log\frac{y}{x} = cx$

(30) $a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ વડે ઘેરાતા પ્રદેશનું ક્ષેત્રફળ = ……..

ઉકેલઃ



$a^2y^2 = x^2(a^2 - x^2)$ ……. (1)

સમીકરણ (1) દ્વારા જ્યારે y = 0 તો x = 0, ± a

આપેલો વક્ર બંને અક્ષોની સાપેક્ષે સંમિત છે.

માંગેલું ક્ષેત્રફળ = 4 (OPAO નું ક્ષેત્રફળ)

$= 4\int_0^a y\,dx = 4\int_0^a \frac{x\sqrt{a^2-x^2}}{a}dx = \frac{4}{a}\int_0^a x\sqrt{a^2-x^2}\,dx$

$a^2 - x^2 = t^2$ મૂકતાં, $\Rightarrow x\,dx = -t\,dt$

જ્યારે x = 0, t = a, અને x = a, t = 0

$= \frac{4}{a}\int_0^a t^2dt = \frac{4}{a}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^a = \frac{4}{a}\times\frac{a^3}{3} = 4\frac{a^2}{3}$ sq.unit