Paper - 1 Solutiuon

.

(1) બિંદુ $x = \pi/3$ આગળ વક્ર $y = 2\sin x + \sin 2x$ ના સ્પર્શકનું સમીકરણ શું થાય ?

ઉકેલ: બિંદુ $x = \pi/3$ આગળ $y = 2\sin x + \sin 2x$

$$\frac{dy}{dx} = 2\cos x + 2\cos 2x$$

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_{x=\pi/3} = 2 \times \frac{1}{2} + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 - 1 = 0$$

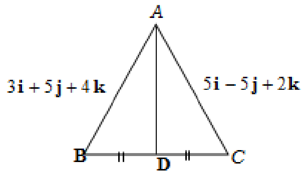
$$x = \pi/3\ ;\ y = 2 \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 \quad \text{બિંદુ} \left(\frac{\pi}{3}, \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) \quad \therefore \left(y - \frac{3\sqrt{3}}{2}\right) = 0$$

$$y = \frac{3\sqrt{3}}{2} \qquad \therefore 2y = 3\sqrt{3}$$

(3) જો $\overrightarrow{AB} = 3i + 5j + 4k$ અને $\overrightarrow{AC} = 5i - 5j + 2k$ એ ΔABC ની બાજુઓ હોય તો A માંથી પસાર થતી મધ્યગાની લંબાઇ શું છે ?

ઉકેલ:



$$\overrightarrow{AD} = \frac{(3+5)i + (5-5)j + (4+2)k}{2}$$

$$\overrightarrow{AD} = \frac{8i + 6k}{2} = 4i + 3k$$

$\therefore$ મધ્યગાની લંબાઇ $= |\overrightarrow{AD}| = \sqrt{16+9} = 5$ એકમ.

(4) ΔABC માં $a = 2$, $B = 60°$ અને $C = 75°$ તો $b = \ldots..$

ઉકેલ : અહીં, $A = 180° - (60° + 75°) = 45°$ હવે, $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}$

$$\therefore \frac{2}{\sin 45^\circ} = \frac{2}{\sin 60^\circ} \quad \therefore \frac{2}{\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{b}{\frac{\sqrt{3}}{2}} \therefore 2\sqrt{2} = \frac{2b}{\sqrt{3}} \quad \therefore b = \sqrt{6}$$

(5) $1 + (1 + x) + (1 + x + x^2) + (1 + x + x^2 + x^3) + \ldots.$ n પદ સુધી સરવાળો કેટલો થાય ?

ઉકેલ: $1 + (1 + x) + (1 + x + x^2) + \ldots\ldots (1 + x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots + x^{n-1}) + \ldots\ldots$

માંગેલો સરવાળો $= \frac{1}{(1 - x)}[(1 - x) + (1 - x^2) + (1 - x^3) + \ldots\ldots$ n પદ સુધી $]$

$= \frac{1}{1 - x}[n - (x + x^2 + x^3 + \ldots\ldots$ n પદ સુધી $)]$

$$= \frac{1}{1 - x}\left[n - \frac{x(1 - x^n)}{1 - x}\right] = \frac{n(1 - x) - x(1 - x^n)}{(1 - x)^2}$$

(8) જો બે ધન વાસ્તવિક સંખ્યાઓ વચ્ચેના સમાંતર, સમગુણોત્તર અને સ્વરિત મધ્યકો અનુક્રમે A, G અને H હોય તો......

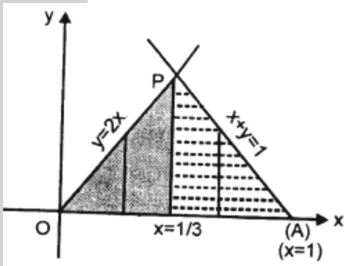
ઉકેલ : ધારો કે $A = \frac{a + b}{2}, G = \sqrt{ab}$ અને $H = \frac{2ab}{a + b}$.

તો $G^2 = ab$ .... (i) અને $AH = \left(\frac{a + b}{2}\right) . \frac{2ab}{a + b} = ab$ ......(ii)

(i) અને (ii) પરથી, $G^2 = AH$.

(10) વક્રો $y = 2x$, $x + y = 1$ અને x - અક્ષ દ્વારા ઘેરાતું ક્ષેત્રફળ શોધો.

ઉકેલ:



આપેલા બે વક્રો P આગળ છેદે છે, જ્યાં $x = 1/3$ અને તેઓ x - અક્ષને O અને A $(x = 1)$ આગળ મળે છે.

$$\text{તેથી માંગેલું ક્ષેત્રફળ} = \int_0^{1/3} 2x\,dx + \int_{1/3}^{1} (1 - x)\,dx$$

$$= [x^2]_0^{1/3} + \left[x - \frac{x^2}{2}\right]_{1/3}^{1}$$

$$= \frac{1}{9} + \left[\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{18}\right)\right] = \frac{1}{3}$$

(11) ચલીત સમતલ એ ઉગમબિંદુથી k અંતરે છે અને યામાક્ષોને A, B, C માં મળે છે. તો ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રનો બિંદુપથ . . . . . .

ઉકેલ : ધારો કે ચલીત સમતલનું સમીકરણ $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ છે.

આ યામાક્ષોને A (a, 0, 0), B (0, b, 0) અને C (0, 0, c) આગળ મળે છે.

ધારો કે (α, β, γ) એ ΔABC ના મધ્યકેન્દ્રના યામ હોય, તો

$\alpha=\frac{a}{3}, \beta=\frac{b}{3}, \gamma=\frac{c}{3} \Rightarrow a=3\alpha, b=3\beta, c=3\gamma$ ......(i)

ઉગમબિંદુથી સમતલ k અંતરે આવેલું છે.

$$\therefore \left|\frac{\frac{0}{a}+\frac{0}{b}+\frac{0}{c}-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\right|=k$$

$$\Rightarrow \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{1}{k^2} \Rightarrow \alpha^{-2}+\beta^{-2}+\gamma^{-2}=9k^{-2}$$

આથી, બિંદુપથ (α, β, γ) $x^{-2}+y^{-2}+z^{-2}=9k^{-2}$ હોય.

(13) જો $f(x)$ એ [2, 5] અંતરાલમાં વિકલનીય હોય કે જ્યાં $f(2) = 1/5$ અને $f(5) = 1/2$ થાય, તો અસ્તિત્વ ધરાવતી સંખ્યા c, $2 < c < 5$ કે જો માટે $f'(c)$

ઉકેલ: $f(2)=\frac{1}{5}$ $\quad f(5)=\frac{1}{2}$

L.M.V.T. દ્વારા $f(x)$ એ $x \in (2, 5)$ પર વિકલનીય છે.

$$= \ldots f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{(b-a)} = \frac{f(5)-f(2)}{(5-2)} = \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{5}\right)\times\frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{10}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{10}$$

(14) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-7x+6}{5x^2-11x+2}\right)$ નું મૂલ્ય કેટલું થાય?

(A) 1/2 (B) 1/4 (C) 1/9 (D) અસ્તિત્વ ધરાવે નહિ

Answer : C

ઉકેલ : $\lim\limits_{x\to 2}\left(\frac{2x^2-7x+6}{5x^2-11x+2}\right)\left(\frac{0}{0} \text{ સ્વરૂપ}\right)$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 2}\frac{(x-2)(2x-3)}{(x-2)(5x-1)} \Rightarrow \lim_{x\to 2}\left(\frac{2x-3}{5x-1}\right)=\frac{4-3}{10-1}=\frac{1}{9}$$

(16) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+x+3}\right)^x$ =........

ઉકેલ : આપણી પાસે, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+5x+3}{x^2+x+x}\right)^x$ છે.

$$=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{4x+1}{x^2+x+2}\right)^x = e^{\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x(4x+1)}{x^2+x+2}} = e^4$$

(20) જો A એ 3 × 3 શ્રેણિક હોય કે જેથી |A| = 4 હોય તો, A(adj A)=.....

$$\text{ઉકેલ: } A(\text{adj } A)=|A|\,I=4\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&0&0\\0&4&0\\0&0&4\end{bmatrix}$$

(21) ધારો કે $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10} = B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n = S$. $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ દરેકમાં 4 સભ્યો છે અને $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ દરેકમાં 3 સભ્યો છે. S દરેક સભ્ય $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ પૈકી કોઈ 5 માં છે, અને $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_n$ પૈકી કોઈ 6 માં છે, તો n =... ?

ઉકેલ : અહી $A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_{10}$- માં કુલ સભ્યો = (10 × 4) / 5 = 8, $B_1 \cup B_2 \cup B_3 \cup \ldots \cup B_n$ માં કુલ સભ્યો = (3n) / 6 = n/2.

અહી n/2 = 8 આપેલ છે. ∴ n = 16.

(22) વર્ગખંડમાં છોકરાઓના સરેરાશ ગુણ 52 અને તે પૈકી છોકરીઓના 42 છે. છોકરા અને છોકરીઓના સંયુક્ત સરેરાશ 50 હોય તો, વર્ગખંડમાં છોકરાઓની ટકાવારી શોધો.

ઉકેલ: ધારો કે છોકરાઓ અને છોકરીઓની સંખ્યા અનુક્રમે n_1 અને n_2 છે.

$$\because \bar{x}=\frac{n_1\bar{x}_1+n_2\bar{x}_2}{n_1+n_2}$$

$$\Rightarrow 50=\frac{52n_1+42n_2}{n_1+n_2} \Rightarrow n_1=4n_2 \text{ .... (1)}$$

$\therefore$ છોકરાઓની ટકાવારી $=\frac{n_1}{n_1+n_2}\times 100=80$ [(1) નો ઉપયોગ કરતાં]

(25) નીચે પૈકીનું કયું $(p \wedge q)$ સાથે તાર્કિક સમતુલ્યતા ધરાવે છે?

ઉકેલ : કારણ કે $p \rightarrow \sim q \equiv \sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$

એટલે કે $\sim(p \rightarrow \sim q) \equiv p \wedge q$ કારણ કે $\sim p \vee \sim q \equiv \sim(p \wedge q)$

અને $\sim(\sim p \wedge \sim q) \equiv p \vee q$

(26) વિકલ સમીકરણ $\frac{dy}{dx}+\sin^2 y=0$ નો ઉકેલ....છે.

ઉકેલ : $\frac{dy}{dx}+\sin^2 y=0 \Rightarrow -\frac{dy}{\sin^2 y}=dx$

સંકલન કરતા $x=\cot y+c$

(27)

$$\text{વિધાન - I} \begin{vmatrix}a^2+x^2 & ab-cx & ac+bx\\ ab+cx & b^2+x^2 & bc-ax\\ ac-bx & bc+ax & c^2+x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}x & c & -b\\ -c & x & a\\ b & -a & x\end{vmatrix}^2$$

વિધાન - II $\Delta^c = \Delta^{n-1}$, જ્યાં n નિશ્ચાયકની કક્ષા છે. અને Δ^c એ Δ ના સહ અવયવનો નિશ્ચાયક છે.

ઉકેલ: વિધાન -1 $\Delta = \begin{vmatrix} x & c & -b \\ -c & x & a \\ b & -a & x \end{vmatrix}$ લો.

જો બધાં ઘટકોએ તેમનાં સંગત સહઅવયવથી બદલવામાં આવે તો

$$\begin{vmatrix} a^2+x^2 & ab+cx & ac-bx \\ ab-cx & b^2+x^2 & bc+ax \\ ac+bx & bc-ax & c^2+x^2 \end{vmatrix} = \Delta^{3-1}$$

$R \leftrightarrow C$

$$\begin{vmatrix} a^2+x^2 & ab-cx & ac+bx \\ ab-cx & b^2+x^2 & bc-ax \\ ac-bx & bc+ax & c^2+x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x & c & -b \\ -c & x & a \\ b & -a & x \end{vmatrix}^2$$

તેથી, વિધાન-1 સાચું છે.
વિધાન - 2 : $\Delta^C = \Delta^{n-1}$
જો નિશ્ચાયક સંગત સહઅવયવથી બનેલો હોય.
આ વિધાન પણ સાચું છે. કારણકે, કોઈ નિશ્ચાયકના બધાં ઘટકોએ તેમનાં સંગત સહઅવયવથી બદલવામાં આવે, તો
નવા નિશ્ચાયકનું મૂલ્ય Δ^{n-1} થાય, તેથી વિધાન-2 સાચું છે અને સાચું કારણ પણ છે.

(28) ઘટના A અને B છે. ઓછામાં એક ઘટના બને તેની સંભાવના 0.6, બન્ને ઘટના બને તેની સંભાવના 0.2 છે. તો P(A) + P(B) = ...

ઉકેલ : $P(A\cup B) = 0.6$ $P(A\cap B) = 0.2$

$P(A\cup B) = P(A) + P(B) - P(A\cap B)$

$0.6 = P(A) + P(B) - 0.2$

$P(A) + P(B) = 0.8$

(29)

$\left(x^2 + \frac{2}{x}\right)^{15}$ માં x થી સ્વતંત્ર પદ X^{15} ના સહ ગુણાંકનો ગુણોત્તર શું થાય ?

ઉકેલ : ${}^{15}C_r (x^2)^{15-r}\left(\frac{2}{x}\right)^r$ ના વિસ્તરણનું વ્યાપક પદ દા.ત., ${}^{15}C_r x^{30-3r} . 2^r$

x^{15} નો સહગુણાંક ${}^{15}C_5 2^5$ (r = 5) છે.

અચળ પદનો સહગુણાંક ${}^{15}C_{10} 2^{10}$ (r = 10) છે.

ગુણોત્તર 1 : 32 (${}^{15}C_5 = {}^{15}C_{10}$) છે.